GE3 - TOPOLOGIA

Esercizi 2

Consegnare entro il 2 Maggio 2007

Problema 1.

Si consideri $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Sia $D \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme denso in $\mathbb{R}$. Si dimostri che la famiglia $\mathcal{B}$ di insieme di aperti

$$\mathcal{B} := \{(d_1, d_2), \ \forall d_1, d_2 \in D\}$$

è una base (per la topologia euclidea su $\mathbb{R}$).

Problema 2.

Si dimostri che uno spazio topologico X è compatto se e soltanto se per ogni famiglia di sottoinsiemi chiusi $\mathcal{G} = \{C\}$ (ovvero ogni $C \in \mathcal{G}$ è chiuso in X) tale che

$$\bigcap_{C \in \mathcal{G}} C = \emptyset$$

si ha che esiste una sottofamiglia finita $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ tale che

$$\bigcap_{C \in \mathcal{F}} C = \emptyset.$$

Problema 3.

Si dimostri che lo spazio quoziente di uno spazio compatto è compatto.

Problema 4.

4.a. Sia X uno spazio metrico e $K \subset X$ un sottoinsieme compatto. Si dimostri che X è chiuso e limitato. (Nota: Un sottoinsieme S di uno spazio metrico X si dice limitato se S è contenuto in un disco di raggio finito, ovvero se $S \subset D_r(x)$ per qualche $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $x \in X$)

4.b. Si dimostri che il viceversa è falso, ovvero si dimostri che esistono uno spazio metrico X e un sottoinsieme $C \subset X$, tali che C è chiuso e limitato, ma non compatto.