GE3 - TOPOLOGIA

Esercizi 3

Consegnare entro il 23 Maggio 2007

Problema 1.

Sia X uno spazio topologico e $A \subset X$ un sottoinsieme non vuoto. Sia $\rho : X \to A$ un'applicazione continua tale che $\rho(a) = a$ per ogni $a \in A$. Una tale ρ si dice *retrazione* di X su A.

1.a. Si dimostri che $\rho_* : \pi_1(X, a_0) \longrightarrow \pi_1(A, a_0)$ è suriettiva.

1.b. Si dimostri che non esiste una retrazione $S^2 \longrightarrow S^1$ della sfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ su un suo circolo equatoriale $S^1 \subset S^2$.

Problema 2.

Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea) e Y uno spazio topologico.

Sia $\phi : X \longrightarrow Y$ un'applicazione continua.

Si dimostri che se esiste un'estensione continua $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$ di ϕ (ovvero, $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$ è continua e $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$ per ogni $x \in X$) allora, per ogni $x_0 \in X$ l'omomorfismo

$$\phi_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, \phi(x_0))$$

è l'omomorfismo nullo.

Problema 3.

3.a. Si dimostri che $\mathbb{R}^1$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ per ogni $n \geq 2$

3.b. Si dimostri che $\mathbb{R}^2$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^m$ per ogni $m \geq 3$

Problema 4. Si consideri $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea.

4.a. Si dimostri che se $X \subset \mathbb{R}^2$ è l'unione di un insieme finito di rette passanti tutte per lo stesso punto di $\mathbb{R}^2$, allora X è semplicemente connesso.

4.b. Sia $Y \subset \mathbb{R}^2$ l'unione del cerchio S^1 (di centro l'origine e raggio 1) e della retta $L = \{(x, 0), \forall x \in \mathbb{R}\}$, ovvero $Y = S^1 \cup L$. Si dimostri che Y non è semplicemente connesso.