Soluzioni Tutorato 2

1. Esercizio
   Dimostrare che, dati comunque due sottoinsiemi A e B di uno spazio topologico X, si ha che:

   (a) $Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$.
   Sia $x \in Fr(A \cup B)$, allora $\forall I \in N(x)$ si ha che $I \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ e $I \cap (A \cup B)^c \neq \emptyset$. Ma $I \cap (A \cup B) = (I \cap A) \cup (I \cap B) \neq \emptyset$, quindi $(I \cap A) \neq \emptyset$ o/e $(I \cap B) \neq \emptyset$. Da $I \cap (A \cup B)^c \neq \emptyset$ si ottiene $I \cap (A^c \cap B^c) \neq \emptyset \rightarrow I \cap A^c \neq \emptyset$ e $I \cap B^c \neq \emptyset$. Da questo segue che x è di frontiera per A o/e per B.

   Non è detto che valga l'uguaglianza. Prendiamo ad esempio $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea, e consideriamo i due sottoinsiemi $A = \{x \in \mathbb{R},\ t.c.\ x < 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}\ t.c\ x \geq 0\}$. Il punto 0 appartiene alla frontiera di entrambi gli insiemi (ci basta ovviamente che appartenga ad uno soltanto), ma l'unione di A e B è tutto $\mathbb{R}$ che non ha frontiera.

   (b) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(b)$.
   Facciamo vedere che $Int(A \cap B) \subseteq Int(A) \cap Int(B)$. Sia x un punto interno di $A \cap B$, allora $\exists I \subseteq A \cap B$ intorno di x, questo implica che $I \subseteq A$ e $I \subseteq B$ $\Rightarrow x \in Int(A)$ e $x \in Int(B)$ e quindi $x \in Int(A) \cap Int(B)$.
   Mostriamo ora l'inclusione inversa. Sia $x \in Int(A) \cap Int(B) \Rightarrow$ esiste $I \subseteq A$ e $J \subseteq B$ intorni di x, ma allora anche $I \cap J$ è un intorno di x (è un aperto perchè intersezioni di aperti e contiene x), e inoltre è contenuto nell'intersezione di A e B. Ne segue che $x \in Int(A \cap B)$.

   (c) $Int(A \cup B) \supseteq Int(A) \cup Int(B)$.
   Sia $x \in Int(A) \cup Int(B)$. Questo vuol dire che esiste un intorno di x, $I(x)$ contenuto in A o/e in B e quindi contenuto nell'unione dei due. Ne segue che x è un punto interno all'unione.
   Anche in questo caso ci sono esempi in cui l'inclusione è stretta. Consideriamo $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea, e i sottoinsiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entramibi questi due sottoinsiemi sono privi di interno, ma la loro unione è tutto $\mathbb{R}$; quindi l'interno

dell'unione è $\mathbb{R}$.

(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
$Est(A \cup B) = Int((A \cup B)^c) = Int((A^c \cap B^c)) = Int(A^c) \cap Int(B^c) = Est(A) \cap Est(B)$, dove la penultima uguaglianza segue dal punto (b). Si ha che $\overline{A \cup B} = (Est(A \cup B))^c = (Est(A) \cap Est(B))^c = (Est(A))^c \cup (Est(B))^c = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(e) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
Lavoriamo con gli esterni e poi ci riconduciamo alla chiusura come abbiamo fatto sopra. $Est(A \cap B) = Int((A \cap B)^c) = Int(A^c \cup B^c) \supseteq Int(A^c) \cup Int(B^c) = Est(A) \cup Est(B)$, dove l'inclusione segue dal punto (c). Passando ai complementari le inclusioni si invertono quindi $\overline{A \cap B} = (Est(A \cap B))^c \subseteq (Est(A) \cup Est(B))^c = Est(A)^c \cap Est(B)^c = \overline{A} \cap \overline{B}$.
Anche in questo caso si possono trovare facilmente esempi in cui vale l'inclusione stretta, come sopra possiamo considerare $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. Esercizio
Sia $S = \{n/(n+1)\}_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Dimostrare che:

(a) $\overline{S} = S \cup \{1\}$ nella topologia euclidea.
Ricordiamo che la chiusura di un insieme può essere vista come l'insieme stesso unione il suo derivato, ovvero unione l'insieme dei suoi punti di accumulazione. Osserviamo prima di tutto che nella topologia euclidea 1 è limite della successione (ed è unico), fissato $\epsilon > 0$ basta prendere $n_0 > 1/\epsilon$. Inoltre tale successione non ammette altri punti di accumulazione: se per assurdo $y \neq 1$ fosse un punto di accumulazione per S, si avrebbe che $\forall \delta > 0$ esisterebbe $x_n \in B_\delta(y) - \{y\}$ tale che $x_n \in S$. Fissiamo $\epsilon = d(1, y)/2$, sappiamo che solo un numero finito di punti $x_1, \ldots, x_n$ della successione cadono fuori da $B_\epsilon(1)$. Sia $\delta = min\{d(x_1, y), \ldots, d(x_n, y), d(1, y)/2\}$, per costruzione in $B_\delta(y)$ non cadono punti della sucessione, assurdo.

(b) $\overline{S} = \mathbb{R}$ nella topologia cofinita.

Basta osservare che i chiusi nella topologia cofinita sono $\mathbb{R}, \emptyset, \{x_1, \ldots, x_n\}$, quindi nessun chiuso diverso da $\mathbb{R}$ può contentere tutto S.

3. Esercizio
   Siano X e Y due spazi vettoriali normati con norme rispettivamente $||\cdot||_X$ e $||\cdot||_Y$. Sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare. Supponendo di sapere che $sup_{x\in X\ :\ ||x||_X=1}(||T(x)||_Y) = M < \infty$, dimostrare che T è un'applicazione continua. Se lo spazio vettoriale ha dimensione finita allora la condizione viene sempre soddisfatta. Dimostrarlo per $\mathbb{R}^n$ utlizzando la norma $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ attraverso la quale si può definire la distanza d' (tutorato 1), che induce la topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$.
   Soluzione:
   Mostriamo che se il sup è limitato allora è continua: fissiamo $\epsilon > 0$ e cerchiamo δ. $||T(x_1) - T(x_2)||_Y = ||T(x_1 - x_2)||_Y = ||x - y||_X ||T((x_1 - x_2)/||x_1 - x_2||_X)||_Y \leq M \cdot ||x - y||_X$ quindi basta prendere $\delta \leq \epsilon/M$.
   Sia ora $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Si ha che $||T|| = sup_{||x||\leq 1}||T(x)|| = sup_{||x||\leq 1}||Ax||$, dove $A \in Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$. Ma $sup_{||x||\leq 1}||Ax|| = sup_{||x||\leq 1}\sum_{i=1}^n |A^{(i)}x| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j}$.

4. Esercizio
   Sia X uno spazio topologico e f, g:$X \to \mathbb{R}$ applicazioni continue con $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea, mostrare che le seguenti applicazioni sono continue:

   (a) $a \cdot f : X \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$.
   $a \cdot f$ non è altro che la composizione di f con l'applicazione moltiplicazione per uno scalare da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, essendo entrambe due funzioni continue, la loro composizione è una funzione continua.

   (b) $|f| : X \to \mathbb{R}$.
   Lo stesso discorso vale per $|f|$ è la composizione di f e la funzione valore assoluti da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. L'unica cosa da dimostrare è che la funzione valore assoluto da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è continua, ma questo è banale se si utilizza la definizione di continuità per gli spazi normati.

   (c) $f + g : X \to \mathbb{R}$.
   L'applicazione $(f, g) : \mathbb{X} \to \mathbb{R}^2$ è continua perchè la composizione con le proiezioni ci dà applicazioni continue per ipotesi. La funzione $f + g$ non è

altro che la composizione di (f, g) con l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che manda la coppia (x, y) in $x + y$.

(d) $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$.
Come sopra basta dimostrare che l'applicazione da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto x \cdot y$ è continua. Fissiamo (x_0, y_0) e sia $\epsilon > 0$. $|x_0 \cdot y_0 - x \cdot y| = |x_0 \cdot y_0 - x_0 \cdot y + x_0 \cdot y - x \cdot y| \leq |x_0 \cdot y_0 - x_0 \cdot y| + |x_0 \cdot y - x \cdot y| = |x_0| \cdot |y_0 - y| + |y| \cdot |x_0 - x|$. Poichè $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$ possiamo maggiorare il tutto con $(|(x_0, y_0)| + \delta) \cdot \delta$. Preso quindi δ che soddisfi $(|(x_0, y_0)| + \delta) \cdot \delta < \epsilon$ si ottiene la continuità in (x_0, y_0).

5. Esercizio
Sia X uno spazio topologico e f, g:$X \to \mathbb{R}^n$ applicazioni continue e con $\mathbb{R}^n$ dotato della topologia euclidea, mostrare che le seguenti applicazioni sono continue:

(a) $a \cdot f : X \to \mathbb{R}^n$ con $a \in \mathbb{R}$.
Per esercizio dimostriamolo in maniera leggermente diversa rispetto a come abbiamo fatto per l'esercizio (4a).
Supponiamo $a \neq 0$, si avrebbe altrimenti l'applicazione costante che sappiamo già essere continua. Poichè f è continua, per ogni $p \in X$ e $\forall B_\delta(f(p))$ in $\mathbb{R}^n$ si ha che esiste I intorno di p tale che $f(I) \subseteq B_\delta(f(p))$. Fissiamo un $\delta_{a \cdot f} > 0$ e poniamo $\delta = \delta_{a \cdot f}/a$; mostriamo che anche $a \cdot f$ è continua in ogni punto. Sia $p \in X$, sia ha quindi che $f(I) \subseteq B_\delta(f(p))$, ovvero $||f(q) - f(p)|| < \delta = \delta_{a \cdot f}/a$, $\forall q \in I$. Moltiplicando tutto per a si ottiene: $||a \cdot f(q) - a \cdot f(p)|| < a \cdot \delta = \delta_{a \cdot f}$, quindi $a \cdot f(I) \subseteq B_{\delta_{a \cdot f}}(a \cdot f(p))$. Ne segue che $a \cdot f$ è continua.

(b) $||f|| : X \to \mathbb{R}^n$.
Tralasciamo questa dimostrazione perchè identica a quelle precedenti.

(c) $f + g : X \to \mathbb{R}^n$.
Fissiamo $\delta > 0$, siano $\delta_f = \delta/2$ e $\delta_g = \delta/2$. Sia $p \in X$ e siano I_f e I_g i due intorni di p tale che $f(I_f) \subseteq B_{\delta_f}(f(p))$ e $g(I_g) \subseteq B_{\delta_g}(g(p))$ (esistono perchè g e f sono continue). Poniamo ora $I = I_f \cap I_g$. Sia $q \in I$, allora si ha che $||(f + g)(p) - (f + g)(q)|| = ||f(p) + g(p) - f(q) + g(q)|| \leq ||f(p) - f(q)|| + ||g(p) + g(q)|| < \delta_f + \delta_f = \delta$. Ne segue che $f + g$ è continua.

6. Esercizio
Sia X uno spazio topologico e f :$X \to \mathbb{R}$ applicazioni continue, con $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea, e f tale che $f(x) \neq 0\, \forall x \in X$ mostrare che $1/f$ è un'applicazione

continua.

Si dimostra in maniera simile agli esercizi precedenti.

7. Esercizio

   Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X e sia χ_S la funzione caratteristica di S. Dimostrare che χ_S è continua in p se e soltanto se $p \notin Fr(S)$.

   Soluzione:

   χ_S è continua in p se per ogni intorno J di $f(p)$ esiste un intorno I di p tale che $f(I) \subseteq J$. Supponiamo che p non appartenga alla frontiera, supponiamo ad esempio che sia un punto esterno (o interno). Esiste un intorno I di p tutto contenuto nell'interno (o nell'esterno di S), quindi $f(I) = \{1\}$ (oppure $\{0\}$). Si ha dunque che per ogni intorno J di $f(p)$ $f(I) \subseteq J$. Supponiamo viceversa che p sia un punto di frontiera, questo implica che in ogni intorno di I di p cadono punti sia dell'interno che dell'esterno, quindi $f(I) = \{1, 0\}$, se $p \in S$ scegliamo l'aperto $J = B_{1/2}(0)$, altrimenti l'aperto $J = B_{1/2}(1)$, in entrambi i casi nessuna immagine di intorni di p sarà contenuta in J.