

Tutorato 10

1. Esercizio

Sia $A \subseteq X$, A si dice retratto se esiste un'applicazione continua $f : X \rightarrow A$ tale che $f \circ i = id_A$. A si dice invece retratto debole se esiste un'applicazione continua $f : X \rightarrow A$ tale che $f \circ i$ sia omotopicamente equivalente all'identità su A . Chiaramente un retratto è un retratto debole. Dare un esempio di retratto debole che non sia un retratto.

Un retratto di deformazione è un retratto che verifica l'ulteriore condizione che $i \circ f \approx id_X$. Dare un esempio di retratto che non sia un retratto di deformazione. Dire se $S^1 \times \{x_0\}$ è un retratto di $S^1 \times S^1$ e se è un retratto di deformazione.

Consideriamo il $X = S^1 \times S^1 \setminus \{x_0\}$, trovare un arco C tale che C sia un retratto di deformazione di X .

Dimostrare che in uno spazio T_2 un retratto è necessariamente un chiuso.

2. Esercizio

Dimostrare che in un pallone da calcio ci sono esattamente 12 pentagoni, utilizzando le seguenti informazioni: un pallone da calcio ha una poligonazione in esagoni e pentagoni e su ogni vertice incidono lo stesso numero di facce $k \geq 3$.

3. Esercizio

Classificare i seguenti poligoni etichettati:

(a) $abcb^{-1}a^{-1}c$

(b) $abcb^{-1}a^{-1}dc^{-1}d^{-1}$

(c) $abac^{-1}b^{-1}c$

4. Esercizio

Dimostrare che (X, T_X) è totalmente sconnesso e localmente connesso se e soltanto se $T_X = P(X)$, ovvero se e soltanto se la topologia su X è quella discreta.

Dimostrare che ogni spazio topologico X metrizzabile con cardinalità al più numerabile è totalmente sconnesso.

Dimostrare che uno spazio X è connesso se e soltanto se ogni applicazione continua da X in uno spazio discreto è costante. Dimostrare che $GL(n, \mathbb{R})$ e $O(n, \mathbb{R})$ sono sottospazi sconnessi di $\mathbb{R}^{n \times n}$.

5. Esercizio

Dimostrare che se uno spazio topologico è metrizzabile allora l'intersezione di due compatti è compatta. Nel caso in cui lo spazio topologico non sia metrizzabile allora non è detto, fornire un controesempio.