Tutorato 2

1. Esercizio
   Dimostrare che dati comunque due sottoinsiemi A e B di uno spazio topologico X si ha che:
   (a) $Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$.
   (b) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(b)$.
   (c) $Int(A \cup B) \supseteq Int(A) \cup Int(B)$.
   (d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   (e) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

2. Esercizio
   Sia $S = \{n/(n+1)\}_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Dimostrare che:
   (a) $\overline{S} = S \cup \{1\}$ nella topologia euclidea.
   (b) $\overline{S} = \mathbb{R}$ nella topologia cofinita.

3. Esercizio
   Siano X e Y due spazi vettoriali normati con norme rispettivamente $||\cdot||_X$ e $||\cdot||_Y$. Sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare.
   Supponendo di sapere che $sup_{x \in X \,:\, ||x||_X = 1}(||T(x)||_Y) = M < \infty$, dimostrare che T è un'applicazione continua. Se lo spazio vettoriale ha dimensione finita allora la condizione viene sempre soddisfatta, dimostrarlo per $\mathbb{R}^n$ utlizzando la norma $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ attraverso la quale si può definire la distanza d' (tutorato 1), che induce la topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$.

4. Esercizio
   Sia X uno spazio topologico e f, g:$X \to \mathbb{R}$ applicazioni continue e con $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea, mostrare che le seguenti applicazioni sono continue:
   (a) $a \cdot f : X \to \mathbb{R}$ con $a \in \mathbb{R}$.
   (b) $|f| : X \to \mathbb{R}$.
   (c) $f + g : X \to \mathbb{R}$.

(d) $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$.

5. Esercizio
   Sia X uno spazio topologico e f, g:$X \to \mathbb{R}^n$ applicazioni continue e con $\mathbb{R}^n$ dotato della topologia euclidea, mostrare che le seguenti applicazioni sono continue:
   (a) $a \cdot f : X \to \mathbb{R}^n$ con $a \in \mathbb{R}$.
   (b) $||f|| : X \to \mathbb{R}^n$.
   (c) $f + g : X \to \mathbb{R}^n$.

6. Esercizio
   Sia X uno spazio topologico e f :$X \to \mathbb{R}$ applicazioni continue, con $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea, e f tale che $f(x) \neq 0 \; \forall x \in X$ mostrare che $1/f$ è un'applicazione continua.

7. Esercizio
   Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X e sia χ_S la funzione caratteristica di S. Dimostrare che χ_S è continua in p se e soltanto se $p \notin Fr(S)$.