Tutorato 3

1. Esercizio
   Un sottoinsieme $E \subseteq X$ spazio topologico si dice discreto se la topologia relativa di E in X è la topologia discreta. Dimostrare che:

   (a) $E \subseteq X$ è discreto se e soltanto se ogni $e \in E$ possiede un intorno U_e in X tale che $U_e \cap E = \{e\}$.

   (b) $\mathbb{Z}$, $\{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}_+\}$ sono sottinsiemi discreti di $\mathbb{R}$.

   (c) $\mathbb{Q}$, $\{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{0\}$ non sono sottoinsiemi discreti di $\mathbb{R}$.

2. Esercizio
   Sia $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 > 0, ||x|| \leq 1\}$. Dire quali dei seguenti sottinsiemi sono chiusi in X rispetto alla topologia indotta da $\mathbb{R}^2$:

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 > 0, \ ||x|| = 1\}$;

   (b) $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 \geq 1/2, ||x|| < 1\}$;

   (c) $C = \{(0, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < t < 1\}$;

   (d) $D = \{(t, t) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < t \leq \sqrt{2}/2\}$;

3. Esercizio
   Sia $X = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x_3| \leq 1, \ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Dire quali dei seguenti sottinsiemi sono aperti in X rispetto alla topologia indotta da $\mathbb{R}^3$:

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < x_3 \leq 1, \ x_1^2 + x_2^2 < 1/2\}$;

   (b) $B = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < t < 1\}$;

   (c) $C = \{(0, t, t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < t \leq 1\}$;

   (d) $D = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1^2 + x_2^2 < 1/2, \ |x_3| \leq 1\}$;

   (e) $E = \{(x_1, x_2, 1/2) \ : \ x_1^2 + x_2^2 < 1/2\}$;

4. Esercizio (*)
   Trovare frontiera, derivato e chiusura dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea:

(a) $B = \{(1/n, 1/k) \in \mathbb{R}^2 \ : \ n, k \in \mathbb{Z}_{>0}\}$. Di questo calcolcolare anche $D(D(B))$ e $D(D(D(B)))$.

(b) $A = \{(t, sin(1/t)) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R} - \{0\}\}$.

5. Esercizio (*)

Dimostrare che:

(a) $(\mathbb{R}, j_s)$ non è N_2. Ricordiamo che una base per la topologia j_s è $B = \{[a, b), \ a < b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

(b) $(\mathbb{R}, j_s)$ è separabile, ovvero che esiste un sottoinsieme denso e numerabile.

(c) Dimostrare che uno spazio metrizzabile e separabile è N_2. Dedurne $(\mathbb{R}, j_s)$ non è metrizzabile.