**Tutorato 5**

1. Esercizio
   Sia $f : (\mathbb{R}, E) \to (S^1, E^2|_{S^1})$ la mappa così definita: $t \to (sin(2\pi t), cos(2\pi t))$. Dimostrare che:

   (a) $f$ è un'indentificazione aperta.

   (b) $f|_{[0,1]}$ è un'indentificazione non aperta.

   (c) $f|_{[0,1)}$ non è un'identifacazione.

2. Esercizio
   Sia $I = [0,1]$ e $I^2 = I \times I$ dotati della topologia euclidea. Definiamo la seguente relazione di equivalenza su $I^2$: $\forall\ x, y \in I^2,\ x \sim y \Leftrightarrow x = y$ oppure $\{x, y\} = \{(0,t), (1,t)\}$ con $t \in I$. Verificare che $I^2/_\sim\ \cong S^1 \times I$.

3. Esercizio
   Sia $I = [-1/2, 1/2]$ dotato della topologia euclidea. Definiamo la seguente relazione di equilvalenza su $I \times S^1$. $\forall\ x = (cos(\phi_x), sin(\phi_x), t_x), y = (cos(\phi_y), sin(\phi_y), t_y) \in T \times S^1\ x \sim y \Leftrightarrow x = y$ oppure $t_x = t_x = -1/2$ oppure $t_x = t_y = 1/2$. Mostrare che $I \times S^1/_\sim$ è isomorfa $S^2$. Rircordiamo che la sfera ha equazioni parametriche $\{(cos(\vartheta)cos(\phi), cos(\vartheta)sin(\phi), sin(\vartheta)), \phi \in [0, 2\pi),\ \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2)\}$.

4. Esercizio
   Sia $\mathbb{R}$ dotato della topoligia euclidea. Consideriamo la relazione di equivalenza relativa al sottoinsieme $\mathbb{Q}$, ovvero $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ oppure $x, y \in \mathbb{Q}$. Per indicare il punto immagine di $\mathbb{Q}$ nello spazio quoziente utilizzeremo comunque $\mathbb{Q}$.

   (a) Mostrare che lo spazio quoziente $X$ non è $T_1$.

   (b) Dire quali dei seguenti insiemi sono aperti nella topologia quoziente:
   $q(-\pi, \pi)$, dove $q$ è l'applicazione quoziente.
   $(\mathbb{R}/\sim) - \{\mathbb{Q}\}$; $q((\mathbb{R}) - \{\pi + n,\ n \in \mathbb{N}\})$;
   $q((\mathbb{R}) - \{\pi, \pi + 1/n,\ n \in \mathbb{N}\})$; $q((\mathbb{R}) - \{\pi \cdot 1/n,\ n \in \mathbb{N}\})$:

   (c) Sia $\{q_n\}_{n\ \in \mathbb{N}}$ una numerazione di $\mathbb{Q}$. Consideriamo l'aperto $U$ di $\mathbb{R}$ cosí definito: $U = \bigcup_{n\ \in \mathbb{N}} B_{(1/2^{n+1})}(q_n)$. $U$ è un aperto saturo (perché?), mostrare che il complementare ha cardinalitá piú che numerabile.

   (d) Mostrare $X$ non è a base locale numerabile.