Esercizio 1

Dimostrare che le seguenti applicazioni da $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono delle distanze.

a) $d(x,x') = (\sum_{i=1}^n |x_i - x'_i|^2)^{1/2}$

b) $d'(x,x') = (\sum_{i=1}^n |x_i - x'_i|^2)$

c) $d''(x,x') = max|x_i - x'_i|$

Esercizio 2

Dimostrare che $d(x,x') = min|x_i - x'_i|$ non é una distanza.

Verificare che le seguenti definizioni sono equivalenti:

1) Un sottinsieme A di uno spazio metrico X si dice aperto se è unione di dischi aperti.

2) Un sottoinsieme A di uno spazio metrico X si dice aperto se $\forall p \in A$ esiste un disco aperto centrato in p e contenuto in A.

Osservazione: Per dimostrare che un insieme A non è aperto in uno spazio metrico basta mostrare che esiste un punto p tale che ogni intorno di p non è contenuto in A. Invece per dimostrare che A è aperto basta considerare un punto generico di A e mostrare che esiste un intorno aperto del punto che sia tutto contenuto in A.

Esercizio 3

Dire se i seguenti insiemi sono aperti o meno in $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia Euclidea.

a) $A = \{(x,y) \ : \ x = y\}$;

b) $B = \{(x,y) \ : \ xy \neq 0\}$;

c) $C = \{(x,y) \ : \ x > 0\}$;

d) $D = \{(x,y) \ : \ y \geq 0\}$;

Dire se i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ dotato della topologia Euclidea sono aperti o meno.

a) $A = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ ||x|| > 2\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = 1\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 \in \mathbb{Q}\}$;

Dimostrare che i seguenti insiemi non sono aperti in $\mathbb{R}^n$ con la topologia Euclidea.
a) $\mathbb{Z}^n$;
b) $\mathbb{Q}^n$;
c) $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x|| \leq 1\}$;
d) $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x|| = 1\}$;

Esercizio 4
Sia $\{T_j\}_{j \in J}$ una famiglia di topologie su X. Dimostrare che $T = \cap_j T_j$ è una topologia.

Esercizio 5
Sia $I_s = \{(-\infty, a), \ a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$, dimostrare che I_s è una topologia su $\mathbb{R}$. Si definisce in maniera simile la topologia I_d considerando gli insiemi illimitati a destra invece che a sinistra.

Esercizio 6
Dare un esempio di due topologie T_1 e T_2 su X tali che $T_1 \cup T_2$ non è una topoligia su X.

Esercizio 7
Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$. Dimostrare che d definita nel seguente modo è una distanza:
$d(n, m) = |1/n - 1/m| \ \forall \ n, m \in \mathbb{Z}$, $d(\infty, n) = |1/n|$, $d(\infty, \infty) = 0$.
Dire se induce la topologia discreta.

Esercizio 8
Sia d una metrica su un insieme finito X, dimostrare che d induce la la topologia discreta su X.