

RIEMANN: LA VISIONE GEOMETRICA

LUCIA CAPORASO

SOMMARIO. Si descrive un panorama dell'ampia e profonda influenza di Riemann sulla geometria, evidenziando da un lato i momenti scientifico-filosofici, dall'altro le sinergie con l'analisi matematica. In particolare, si discutono la formula di Riemann-Hurwitz, il teorema di esistenza di Riemann, e il teorema di Riemann-Roch.

INDICE

1. Geometria estrinseca e intrinseca	1
2. Geometria differenziale e riemanniana	3
3. Multi-funzioni complesse e topologia	4
4. Integrali abeliani e superfici di Riemann	7
5. Superfici di Riemann e geometria complessa	9
6. Geometria complessa e geometria algebrica	11
7. Geometria algebrica e spazi di moduli	13
Riferimenti bibliografici	15

1. GEOMETRIA ESTRINSECA E INTRINSECA

Bernhard Riemann (1826 -1866) ha rivoluzionato la geometria sviluppando il punto di vista astratto, secondo il quale gli oggetti geometrici vengono studiati indipendentemente da uno spazio ambiente che li contenga. A questa innovazione se ne collega un'altra, altrettanto dirompente: gli oggetti geometrici possono avere un numero arbitrario di dimensioni, anche più delle tre che percepiamo intuitivamente.

Di fatto, Riemann mette in discussione il concetto di spazio inteso come spazio ambiente assoluto. Nella geometria classica, “da Euclide a Legendre,” l'idea assoluta di spazio è accettata, pur essendo soggetta a dubbi anche di natura filosofica, e tale oscurità, continua Riemann nella sua tesi di abilitazione - *Habilitationschrift*, [Ri54], è forse motivata dal fatto che la nozione di grandezza di molteplici dimensioni non è stata mai approfondita. È proprio questo uno degli obiettivi della tesi, il primo capitolo della quale è titolato “Il concetto di grandezza n -dimensionale - *Begriff einer n -fach ausgedehnten Grösse*”.

Secondo il sistema allora vigente all'università di Gottinga, le tesi di abilitazione venivano presentate dai candidati a un pubblico formato di docenti di varie discipline, tra cui la filosofia con un ruolo preminente. Il titolo stesso della tesi, “Sulle ipotesi che fondano la geometria - *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*”, presenta un aspetto filosofico. Un pensatore straordinario come Riemann si trova così ad esporre le sue idee in un consesso altamente qualificato, per di più in un momento estremamente fertile dal punto vista scientifico. Siamo infatti in pieno 1800, quando è da poco stata fatta luce sulla questione dell'assolutezza della geometria euclidea, grazie alla dimostrazione dell'indipendenza del quinto postulato di Euclide.

In sintesi, nei suoi Elementi (300 a.c.) Euclide fonda rigorosamente, a partire da cinque postulati e seguendo un procedimento logico-deduttivo, la geometria nota ai suoi tempi (che oggi chiamiamo euclidea), dimostrando in ordine consequenziale tutte le proposizioni, o teoremi, di interesse; un esempio fra tutti: il teorema di Pitagora. La radice del procedimento è dunque costituita dai cinque postulati, verità evidenti che non necessitano dimostrazione. Il quinto di questi (noto come postulato della retta parallela) è meno evidente degli altri e sorge naturale la domanda se non sia, in verità, una conseguenza logica dei primi quattro. Dopo secoli di studi e tentativi di ottenere il quinto postulato deducendolo dagli altri, all'inizio del 1800 si è dimostrato che, invece, questo è indipendente. La dimostrazione si basa sulla scoperta di geometrie nelle quali valgono i primi quattro postulati ma non il quinto.

Dunque la geometria euclidea non è l'unica possibile; con la scoperta dalle cosiddette geometrie “non-euclidee” (che violano alcuni dei postulati di Euclide) viene abbattuta quella convinzione culturale radicata nei secoli che considerava come assoluta la geometria euclidea. Come vedremo, le geometrie non-euclidee non sono solo modelli geometrici ad hoc, utili a mostrare che il quinto postulato è indipendente dagli altri; tutt'altro, esse consentono una rappresentazione rigorosa di parti dell'universo ad oggi conosciuto.

Questa svolta, scientifica e filosofica, avviene e matura nella prima metà del 1800 e Riemann, che ne scrive solo brevemente per sottolineare la natura empirico/ipotetica dei postulati euclidei, ne è probabilmente l'erede principale.

Nella prima parte della tesi di abilitazione Riemann sviluppa dunque la nozione astratta di varietà geometrica di n dimensioni, con $n \geq 1$; il termine “varietà” è la traduzione italiana del termine tedesco *Manigfaltigkeit* usato in [Ri54], che in inglese è tradotto “manifold”. La

geometria di queste varietà è completamente indipendente da un eventuale spazio ambiente, ed è definita in modo intrinseco alla varietà stessa.

2. GEOMETRIA DIFFERENZIALE E RIEMANNIANA

Cosa sono dunque, per Riemann, le varietà di dimensione n ? Prima di tutto, queste hanno, localmente in ogni punto, lo stesso aspetto di $\mathbb{R}^n$, dove $\mathbb{R}$ denota i numeri reali: se $n = 1$ abbiamo una “curva” piuttosto che una linea retta, se $n = 2$ una “superficie” da pensare come un piano ondulato. In secondo luogo, per poter definire una metrica sulle varietà, quindi misurare distanze e angoli, è necessario che questa somiglianza locale con $\mathbb{R}^n$ consenta di utilizzare il calcolo infinitesimale. Infatti Riemann descrive come calcolare le distanze sostituendo il concetto di retta tra due punti con il concetto di “geodetica - *kürzeste Linie*”, curva di minima lunghezza. Le geodetiche dipendono dalla geometria locale della varietà e vengono definite attraverso elementi infinitesimi di linea, utilizzando il calcolo differenziale. Ciò è possibile se la varietà è “liscia”; per esempio, una curva liscia è priva di incroci o angoli, una superficie liscia non deve avere spigoli o punte. Con la terminologia moderna, le varietà di Riemann sono varietà differenziabili lisce, la cui definizione posticipiamo alla Sezione 5, per miglior chiarezza.

Riemann definisce quindi un nuovo tipo di metrica, del quale la metrica euclidea, che calcola la distanza tra due punti attraverso il teorema di Pitagora, è un caso speciale. Nel farlo utilizza risultati che il suo mentore, Gauss, aveva da poco stabilito in quello che è considerato il trattato fondante della geometria differenziale, [Ga27]. Qui Gauss dimostra lo straordinario Teorema Egregium, secondo il quale la curvatura (gaussiana) di una superficie è intrinseca alla superficie, dunque indipendente dallo spazio ambiente. Riemann mostra che le geodetiche sulle superfici dipendono dalla curvatura gaussiana, ed estende la teoria a varietà di dimensione arbitraria generalizzando la nozione di curvatura a quello che oggi chiamiamo “tensore di curvatura di Riemann”.

Per inquadrare meglio il contesto, ricordiamo che Gauss è, insieme a Bolyai e Lobachevsky, tra gli scopritori delle geometrie non-euclidee citate precedentemente. Che la geometria euclidea non si adattasse perfettamente a nuove realtà accessibili grazie al progresso tecnico-scientifico, come le misurazioni su scala planetaria o astrale, era un dato di fatto con il quale gli scienziati si confrontavano ben prima del diciannovesimo secolo. Nel 1800 la matematica dispone però dei nuovi

e ben rodati strumenti analitici del calcolo infinitesimale di Newton e Leibniz, sviluppati in geometria (sempre secondo l'approccio classico) da Descartes, Eulero e Lagrange tra il 1600 e il 1700; su questi strumenti si basano le svolte costituite dalla geometria differenziale e riemanniana di Gauss in [Ga27], e di Riemann in [Ri54].

A sottolineare ulteriormente la sintonia tra Riemann e Gauss, c'è il fatto che fu Gauss stesso a scegliere, dalla terna proposta da Riemann, il tema della tesi di abilitazione [Ri54]. Questa, essendo diretta a un pubblico non esclusivamente matematico, è in stile discorsivo, non contiene formule, e riduce il simbolismo al minimo. In essa Riemann analizza anche aspetti filosofici chiedendosi, in particolare, quali fattori possano determinare la metrica sulle varietà; venendo meno l'idea assoluta di spazio, è naturale chiedersi cosa influenzi le misurazioni nella realtà fisica. Nella parte finale della tesi scrive che “il fondamento di tali misurazioni va ricercato al di fuori, nelle forze vincolanti che agiscono su di esse - *der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden*”.

Di questa frase impressiona la risonanza con la teoria della relatività di Einstein: essa suggerisce che Riemann abbia intuito quel legame tra geometria e fisica che è stato poi a fondamento della teoria della relatività generale (1915). La geometria dello spazio-tempo della relatività einsteiniana è non-euclidea e, più esattamente, quasi-riemanniana. La curvatura dello spazio-tempo einsteiniano è espressione della forza di attrazione gravitazionale, coerentemente con quanto Riemann aveva ipotizzato nella tesi di abilitazione. Poco dopo la sua prematura scomparsa nel 1866, altri matematici, tra cui Christoffel, Levi-Civita e Ricci-Curbastro, approfondiranno ed elaboreranno le sue idee (esposte, come già detto, in modo sintetico e non tecnico), fondando la geometria riemanniana nell'ambito della geometria differenziale. Sarà questa geometria riemanniana ad entrare come parte strutturante nella teoria della relatività generale.

In conclusione, la geometria classica viene da Riemann inserita in una prospettiva più generale, e la geometria euclidea diventa un caso speciale di geometria riemanniana. Questa, trascorsi quasi due secoli, rimane un'area di ricerca fondamentale della matematica contemporanea.

3. MULTI-FUNZIONI COMPLESSE E TOPOLOGIA

Nonostante questo articolo sia dedicato al suo impatto nella geometria, va sottolineato che la straordinarietà dell'opera di Riemann è nel suo eclettismo e nell'ampiezza della sua visione, che unisce aree lontane fra loro, dalla fisica alla teoria dei numeri; si pensi all'ipotesi di

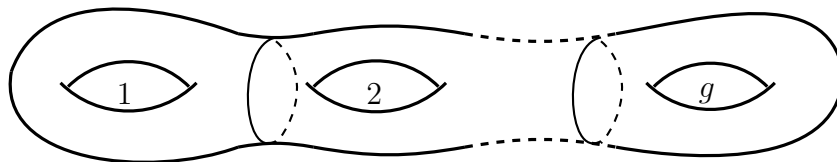
Riemann, in [Ri59]. La tesi di dottorato e sua prima pubblicazione, [Ri51], ha titolo “Fondamenti per una teoria generale delle funzioni di una variabile complessa - *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*”; un articolo di analisi matematica la cui influenza scientifica è ben nota. Fin dall’inizio della sua carriera Riemann è profondamente interessato alle funzioni complesse, la cui variabile vive nella superficie $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, il classico piano euclideo identificato con $\mathbb{C}$ da Gauss. Ciò che lo conduce all’idea di superficie astratta, introdotta in [Ri51] e sviluppata in [Ri57], è lo studio analitico delle multi-funzioni (funzioni con più valori), come la radice quadrata, il logaritmo e, soprattutto, gli integrali abeliani di cui parleremo in seguito.

Se per ogni (o quasi) numero complesso una funzione assume più di un valore, possiamo immaginare che l’insieme di tali valori ricopra il piano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, formando una nuova superficie che lo riveste in tanti strati quanti sono i possibili valori. Questa immagine porta Riemann a un concetto profondamente innovativo di superficie (denominato “superficie di Riemann” poco dopo la sua scomparsa).

Per esempio, i valori della funzione radice quadrata formano una superficie costituita di due strati, o “rami - *Zweige*”, ciascuno dei quali ricopre perfettamente il piano complesso. Questi due strati non sono disgiunti poiché sono incollati tra di loro sopra il numero complesso 0, che ha un’unica radice quadrata. La radice quadrata di 0 è dunque un punto speciale, dal quale si diramano i due rami della superficie; Riemann lo chiama “punto di ramificazione - *Verzweigungsstelle*”. Tuttavia un punto di ramificazione non è una singolarità della superficie, poiché localmente in tal punto la superficie è come in tutti gli altri punti: se la guardassimo attraverso una lente di ingrandimento essa non sarebbe distinguibile da $\mathbb{R}^2$, esattamente come le varietà descritte nella sezione precedente. Con la terminologia attuale diciamo che la superficie corrispondente alla radice quadrata è una superficie topologica connessa.

Se il concetto di spazio connesso si rende qui necessario, emerge anche la necessità di perfezionarlo, cosa che Riemann fa in [Ri57, Sez. 2], avendo compreso come nello studio delle superfici associate alle multi-funzioni algebriche e integrali sia necessario approfondire aspetti geometrici appartenenti a quella che lui chiama (seguendo Leibniz) *Analysis Situs*, e noi oggi chiamiamo topologia.

Egli introduce un nuovo invariante globale per queste superfici che denomina “*p*-connessione - *Zusammenhang*”, con *p* un numero naturale. In loc. cit. lo definisce, lo illustra con alcune figure (piuttosto rare nelle

FIGURA 1. Superficie compatta e orientabile di genere g .

sue opere), e in seguito lo calcola per le superfici associate alle multifunzioni algebriche, come vedremo in seguito. Oggi traduciamo questa p -connessione attraverso il concetto di “genere” di una superficie o, equivalentemente, di “primo numero di Betti” (che è uguale al doppio del genere). Fu infatti Betti, contemporaneo e caro amico di Riemann, ad approfondirne le intuizioni topologiche definendo gli invarianti oggi noti come numeri di Betti, grazie a Poincaré, al quale si deve la prima trattazione sistematica della topologia in [Po95, Sez. 6] e nei successivi complementi.

Per descrivere qualche esempio al quale ricollegarci nel seguito, notiamo che il piano complesso, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, nostra superficie di base, non è compatto. Un modo naturale di “compattificarlo” è aggiungere un punto, denotato ∞ , inserendolo dentro la sfera $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Più precisamente, S^2 è il luogo dei punti in $\mathbb{R}^3$ che distano 1 dall’origine:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\};$$

S^2 è una superficie compatta. Poniamo $\infty = (0, 0, 1)$; ora $S^2 \setminus \{\infty\}$ è identificabile con il piano di equazione $z = 0$ tramite la proiezione stereografica dal punto ∞ ; quindi il complementare di ∞ è una copia di $\mathbb{R}^2$.

La sfera è un esempio di superficie di genere uguale a zero. Per un importante teorema di topologia della prima metà del 1900, due superfici compatte, connesse e orientabili sono omeomorfe (quindi indistinguibili dal punto di vista topologico) se e soltanto se hanno lo stesso genere; si veda [Ma67, Cap. 1]. Per esempio una sfera e un ellissoide sono omeomorfi. Diamo un piccolo chiarimento tecnico: il termine “superficie” assume qui, oltre agli omeomorfismi locali con aperti di $\mathbb{R}^2$, la validità delle proprietà T2 (Hausdorff) e N2 (esistenza di una base numerabile).

Un modello di superficie di genere 1, il cosiddetto “toro”, è la superficie di una ciambella. Un disegno di superficie di genere g è nella figura 1.

Torneremo alle superfici di Riemann dopo averle collegate allo studio delle funzioni integrali abeliane.

4. INTEGRALI ABELIANI E SUPERFICI DI RIEMANN

Riemann studia gli integrali abeliani e fonda la teoria delle curve algebriche nell'articolo "Teoria delle funzioni abeliane - *Theorie der Abel'schen Funktionen*", [Ri57], di impatto incalcolabile; il carattere analitico del suo titolo ne riflette l'impronta scientifica, ma non deve trarre in inganno. Proseguendo quanto intrapreso nella sua tesi di dottorato, per studiare gli integrali abeliani Riemann introduce un approccio geometrico illuminante e innovativo, oggi completamente integrato nel linguaggio matematico.

Lo studio delle funzioni abeliane è particolarmente attivo nel diciannovesimo secolo. Queste, trattate da Abel (in [Ab41], pubblicato postumo), sono multi-funzioni di variabile complessa, x , del tipo seguente

$$(1) \quad f(x) = \int_{x_0}^x R(s, z) dz,$$

dove R è una funzione razionale delle variabili complesse s e z , tra loro collegate da una relazione algebrica della forma $F(s, z) = 0$, con F polinomio irriducibile. Un tipico esempio è

$$(2) \quad \int_{x_0}^x \frac{dz}{s} = \int_{x_0}^x \frac{dz}{\sqrt{z^3 - z}}$$

con

$$(3) \quad F(s, z) = s^2 - z^3 + z.$$

Integrali di questo tipo, visti solo come funzioni reali, appaiono naturalmente nel calcolo delle lunghezze di archi di curve nel piano euclideo, e avevano occupato ampio spazio già nel diciottesimo secolo, nel lavoro di Fagnano e Eulero, tra gli altri. Abel li studia, più in generale, come funzioni complesse, e così farà anche Riemann.

Tra le questioni fondamentali, oltre alla loro calcolabilità e al fatto che la funzione integranda è una multi-funzione, c'è la loro dipendenza dal cammino di integrazione. Gli integrali abeliani dunque sono, a vario titolo, multi-funzioni, e Riemann li studia come tali aprendo le porte per nuovi, e forse inaspettati, sviluppi.

Il polinomio $F(s, z)$ determina una multi-funzione, $s = s(z)$, i cui valori sono, per ogni z_0 fissato, le soluzioni dell'equazione $F(s, z_0) = 0$. Come già accennato, Riemann associa a questa multi-funzione una superficie, dominio della variabile s , che riveste $\mathbb{C}$ in modo che sopra al punto $z_0 \in \mathbb{C}$ ci siano gli zeri del polinomio $F(s, z_0)$. Per esempio, se $F = s^2 - z$ ritroviamo la multi-funzione radice quadrata, la cui superficie è stata descritta nella Sezione 3.

Per qualche valore z_0 , il polinomio $F(s, z_0)$ potrebbe essere costante e non ammettere zeri; un rimedio possibile è rimuovere questi valori critici e lavorare con $\mathbb{R}^2$ privato di tali punti. Questo è da scartare, non solo perché è interessante studiare i valori critici, ma anche perché lavorare con una superficie non compatta risulta difficile e condizionante. Come sappiamo, il fatto che nemmeno $\mathbb{R}^2$ sia compatto si risolve aggiungendovi il punto ∞ e inserendolo dentro la sfera S^2 . Come conseguenza, il polinomio $F(s, z)$ va studiato su S^2 , considerando anche il valore $z = \infty$ attraverso il cambiamento di variabile $w = 1/z$, dove ∞ corrisponde a $w = 0$. Coerentemente con ciò, anche il dominio della variabile s deve essere allargato in modo che la superficie T sia compatta. Per farlo, e risolvere al contempo la questione dei punti critici, si consente anche alla variabile s di assumere valori “all’infinito” grazie all’uso di variabili omogenee e funzioni razionali, su cui sorvoliamo.

Al polinomio $F(s, z)$ Riemann associa dunque una superficie T che riveste S^2 , in modo che su ogni punto di S^2 ci sia un insieme finito e non vuoto di punti; inoltre T ha la struttura di una superficie topologica compatta, connessa e orientabile. Su T l’integranda di (1) è una funzione ben definita.

Anche visto su T , l’integrale (1) dipende, a priori, dalla scelta del cammino di integrazione. Era, già allora, ben noto che l’integrale di una forma differenziale esatta lungo un cappio (curva chiusa) è nullo solo se il cappio è contraibile, ossia trasformabile in modo continuo in un punto evitando eventuali singolarità dell’integranda. Dunque se ogni cappio fosse contraibile l’integrale non dipenderebbe dalla scelta del cammino; d’altra parte su una superficie di genere positivo, come quella nella figura 1, esistono sempre cappi non contraibili (contrariamente al caso di S^2). La dipendenza dell’integrale dalla scelta del cammino è quindi un problema di topologia o, nelle parole di Riemann, di Analysis Situs. Si rende ora necessario calcolare il genere di T , cosa che Riemann fa in [Ri57, Sez. 7].

Vediamo prima qualche esempio: la superficie, T , da associare all’integrale (2) è data dal polinomio (3) che, come polinomio in s , ha grado 2. Quindi T è formata da due strati che rivestono $\mathbb{C}$ con punti di ramificazione su $z = 0, 1, -1$; sopra il punto ∞ di S^2 abbiamo un unico punto di T , che risulta essere di ramificazione. Riassumendo, T riveste S^2 con due strati e quattro punti di ramificazione; Riemann usa esattamente questi dati per dimostrare che il genere di T è uguale a 1. La somiglianza con la superficie associata alla radice quadrata, descritta sopra, è evidente, l’unica differenza sta nel numero dei punti di ramificazione, che per la radice quadrata risultano essere solo due, sui punti $z = 0, \infty$; questa superficie ha genere uguale a 0.

Più in generale, Riemann esprime il genere di ogni tale superficie in funzione del numero di strati con cui riveste S^2 , detto “grado” del rivestimento, del numero di punti di ramificazione, e di una loro molteplicità visibile solo se il grado è almeno 3. La sua formula è un caso speciale della ben nota formula di Riemann-Hurwitz, che vale per superfici rivestite di genere arbitrario.

5. SUPERFICI DI RIEMANN E GEOMETRIA COMPLESSA

Abbiamo descritto le superfici di Riemann associate a polinomi dal punto di vista topologico, utilizziamo ora metodi analitici.

Per come una tale superficie, T , è costruita, dato un qualsiasi suo punto, p , esiste un aperto, U , in T che contiene p ed è omeomorfo ad un aperto, A , in $\mathbb{C}$; sia $\phi : U \rightarrow A$ l’omeomorfismo. Quando l’intersezione di due tali aperti, U e U' , non è vuota, otteniamo un omeomorfismo tra due aperti di $\mathbb{C}$, dato dalla composizione $\phi' \circ \phi^{-1}$ ristretta a $\phi(U \cap U')$; l’osservazione cruciale è che, per costruzione, l’omeomorfismo $\phi' \circ \phi^{-1}$ è una funzione olomorfa, con inversa olomorfa (per simmetria). Questo vale per tutte le funzioni $\phi' \circ \phi^{-1}$, che assumono un ruolo strutturale e sono denominate “funzioni di transizione” della superficie T , vista non più solo come superficie topologica, ma come superficie di Riemann, dotata quindi di una struttura analitica.

Abbiamo in tal modo introdotto la definizione di superficie di Riemann (astratta): una superficie topologica ricoperta da una collezione, $\{U_i, i \in I\}$, di aperti U_i omeomorfi ad aperti in $\mathbb{C}$ tramite omeomorfismi, $\phi_i : U_i \rightarrow A_i \subset \mathbb{C}$, tali che tutte le funzioni di transizione, $\phi_{i'} \circ \phi_i^{-1}$ siano olomorfe; gli aperti e gli omeomorfismi fanno parte della definizione. In modo piuttosto suggestivo, gli aperti della superficie con i corrispondenti omeomorfismi, (U_i, ϕ_i) , sono denominati “carte locali” e la collezione di carte, $\{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ un “atlante”.

La già menzionata orientabilità delle superfici di Riemann segue da quella di $\mathbb{C}$ e dal fatto che funzioni olomorfe conservano l’orientazione.

Manteniamo ora l’impegno di definire le varietà differenziabili lisce, definendo, con l’occasione, anche le varietà analitiche di dimensione arbitraria. Lo schema della definizione di superficie di Riemann è lo stesso della definizione di varietà differenziabile: entrambe si basano sul dato di un ricoprimento in aperti opportuni e sulla natura delle funzioni di transizione. Una varietà differenziabile di dimensione n è uno spazio topologico T_2 e N_2 , ricoperto da una collezione di aperti omeomorfi ad aperti in $\mathbb{R}^n$, tali che le corrispondenti funzioni di transizione (tra aperti in $\mathbb{R}^n$) siano differenziabili; gli aperti, gli omeomorfismi, e le funzioni di transizione fanno parte della definizione. Una tale varietà si dice

liscia se le funzioni di transizione sono infinitamente differenziabili, o di classe C^∞ . In breve, una varietà liscia di dimensione n ha un atlante le cui funzioni di transizione sono funzioni C^∞ tra aperti in $\mathbb{R}^n$.

Una varietà differenziabile si dice analitica, o complessa, se n è pari e se le funzioni di transizione sono olomorfe. Una varietà analitica è quindi necessariamente liscia, e la sua dimensione, come varietà complessa, è $n/2$ (il dimezzamento è dovuto al fatto che la dimensione complessa di $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ è uguale a 1, mentre quella reale è uguale a 2).

Le superfici di Riemann sono dunque varietà analitiche di dimensione 1, e possono essere studiate con i metodi dell'analisi.

Così come una multifunzione algebrica con dominio $\mathbb{C}$ diventa una vera funzione con dominio un'opportuna superficie di Riemann, un integrale abeliano diventa un integrale su tale superficie di Riemann.

L'integrale in (2) diventa un integrale sulla superficie, T , associata al polinomio $s^2 - z^3 + z$; lo scriviamo come segue

$$\phi(p) = \int_{p_0}^p \frac{dz}{s}$$

con $p_0, p \in T$ e s variabile su T . Come sappiamo, T ha genere 1 e l'integrale dipende dalla scelta del cammino da p_0 a p , nonostante la forma differenziale, dz/s , sia olomorfa su T (verifica che omettiamo).

La forma differenziale dz/s è un cosiddetto “differenziale abeliano” su T . Abel lavora su $\mathbb{C}$ (le superfici di Riemann nacquero dopo la sua scomparsa), ciò nondimeno ottiene alcuni risultati fondamentali ponendo le basi per il loro esame nella nuova prospettiva introdotta da Riemann; si veda [Gr76]. Citeremo ora, usando il linguaggio moderno, alcuni fatti notevoli dovuti ad Abel, Jacobi e Riemann, rinviando a [ACGH] per una trattazione completa.

I differenziali abeliani su una superficie T , ossia le 1-forme differenziali olomorfe, formano uno spazio vettoriale, denotato $\Gamma(\Omega_T)$, la cui dimensione è uguale al genere, g , di T .

Se, dati due punti $p_0, p \in T$, proviamo a interpretare l'integrale $\int_{p_0}^p$ come una funzione su $\Gamma(\Omega_T)$, incontriamo, come già detto, il problema della scelta del cammino da p_0 a p . Se invece il cammino di integrazione, γ , è fissato, abbiamo una vera funzione su $\Gamma(\Omega_T)$, che manda una forma differenziale ω nel suo integrale, $\int_\gamma \omega$, calcolato lungo il cammino γ ; per le proprietà degli integrali, tale funzione è lineare, quindi $\int_\gamma$ definisce un elemento dello spazio duale, $\Gamma(\Omega_T)^*$, di $\Gamma(\Omega_T)$.

Inoltre, archi omologhi danno lo stesso integrale, quindi se γ e γ' sono omologhi abbiamo $\int_\gamma = \int_{\gamma'}$. Consideriamo quindi lo spazio delle classi di omologia dei cappi, il primo gruppo di omologia $H_1(T, \mathbb{Z})$; il

suo rango è il primo numero di Betti di T , uguale a $2g$. Scelta una base di (classi di) cappi, $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}\}$, la seguente applicazione è ben definita:

$$\begin{aligned} H_1(T, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{\iota} \Gamma(\Omega_T)^* \\ \sum_{i=1}^{2g} n_i \gamma_i &\mapsto \sum_{i=1}^{2g} n_i \int_{\gamma_i} \end{aligned}$$

dove $n_i \in \mathbb{Z}$. Ora, ι è un omomorfismo iniettivo, la sua immagine è un sottogruppo, Λ , di $\Gamma(\Omega_T)^*$, tale che il quoziente è una varietà analitica (di più, algebrica) nota come “varietà Jacobiana” di T , denotata

$$\text{Jac}(T) = \Gamma(\Omega_T)^* / \Lambda \cong \mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^{2g}.$$

Le superficie di Riemann e la sua Jacobiana sono strettamente collegate: se $g \geq 1$, per ogni p_0 fissato su T , l'applicazione che manda un punto p di T nella classe della funzione integrale $\int_{p_0}^p$ è un'immersione di T in $\text{Jac}(T)$ (quindi un isomorfismo se $g = 1$), la cui immagine genera $\text{Jac}(T)$ come gruppo. Questa applicazione è il caso $n = 1$ del morfismo di Abel-Jacobi, definito come segue per ogni $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} C^n &\xrightarrow{\alpha_n} \text{Jac}(T) \\ (p_1, \dots, p_n) &\mapsto \left[\sum_{i=1}^n \int_{p_0}^{p_i} \right]. \end{aligned}$$

Le fibre di α_n sono descritte grazie ad Abel, e risultati di Jacobi implicano che α_n è suriettivo per ogni $n \geq g$, ponendo in una nuova prospettiva lo studio degli integrali abeliani.

La teoria delle varietà Jacobiane, radicata in [Ri57], presenta aspetti analitici, algebrici e aritmetici di profondità straordinaria che l'hanno resa protagonista di importanti conquiste scientifiche anche recenti; un celebre esempio: la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat, ottenuta da Wiles e Taylor nel 1995.

6. GEOMETRIA COMPLESSA E GEOMETRIA ALGEBRICA

Abbiamo illustrato come ad ogni polinomio $F(s, z)$ venga associata una superficie di Riemann compatta. Viceversa, Riemann afferma che a ogni tale superficie corrisponde una multi-funzione algebrica; questa affermazione, nota come teorema di esistenza di Riemann, è molto forte: essa prevede che una superficie astratta, definita tramite un atlante di carte locali con funzioni di transizione olomorfe, possa essere realizzata come la superficie associata a un polinomio.

La sua dimostrazione non convinse pienamente i matematici del tempo, essendo basata su un principio di esistenza attribuito a Dirichlet (per la soluzione di certe equazioni differenziali), non dimostrato ma accettato come evidenza intuitiva, grazie al quale Riemann ottiene l'esistenza di una funzione meromorfa su una superficie astratta. Bisognerà aspettare Hilbert, nel 1900, per avere una dimostrazione del principio di Dirichlet e per completare così anche quella del Teorema di Esistenza. Sottolineiamo come il dibattito intorno a questo teorema sia stato a lungo fertile e abbia generato interessanti formulazioni equivalenti in vari campi della matematica (la topologia e l'algebra, oltre alla geometria analitica e algebrica), e notevoli sviluppi relativi alla relazione tra strutture analitiche e algebriche; si veda per esempio [Se56].

Secondo una sua formulazione concisa ma suggestiva, il teorema di esistenza di Riemann stabilisce che ogni superficie analitica compatta è una curva algebrica proiettiva. Sottolineiamo che lo stesso non vale in dimensione superiore: esistono varietà analitiche compatte già in dimensione 2 che non sono algebriche; si veda anche [MK71].

Tutto questo conduce a parlare di geometria algebrica. Gli esperti sapranno immediatamente associare al polinomio $F(s, z)$ una curva algebrica piana, data dal luogo dei suoi zeri in $\mathbb{C}^2$ con coordinate (s, z) ; inserendo $\mathbb{C}^2$ nella sua compattificazione, il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ (anche denotato $\mathbb{CP}^2$), e considerando la chiusura della curva data da F , otteniamo una curva algebrica proiettiva, che chiamiamo C . Più precisamente, utilizzando coordinate omogenee, x_0, x_1, x_2 , su $\mathbb{P}^2$, tali che $z = x_1/x_0$ e $s = x_2/x_0$, la curva C è il luogo degli zeri del polinomio omogeneo $F^{\text{om}}(x_0, x_1, x_2)$ definito nel modo seguente

$$F^{\text{om}}(x_0, x_1, x_2) = x_0^{\deg F} F(x_1/x_0, x_2/x_0).$$

Al polinomio irriducibile $F(s, z)$ abbiamo così associato, oltre alla superficie di Riemann T , una curva algebrica proiettiva C . La curva C ha una struttura analitica naturale, ma potrebbe non essere liscia, avendo delle singolarità nei punti dove le tre derivate parziali di $F^{\text{om}}(x_0, x_1, x_2)$ si annullano simultaneamente. Non è difficile vedere che le eventuali singolarità sono in numero finito e, al di fuori di esse, C è una varietà analitica, così come T . Il collegamento tra T e C è nell'esistenza di un'applicazione suriettiva da T a C che, al di fuori delle singolarità di C , è un isomorfismo di varietà analitiche. Diremo che C è un “modello proiettivo” di T ; se C non ha punti singolari è isomorfa a T come varietà analitica.

La curva C associata al polinomio (3) è data dagli zeri in $\mathbb{P}^2$ del polinomio $x_0x_2^2 - x_1^3 + x_0^2x_1$, non ha punti singolari, ed è isomorfa a T come varietà analitica; C deve essere vista come una realizzazione

concreta di T dentro lo spazio ambiente costituito dal piano proiettivo. Facciamo vedere come il rivestimento doppio da T a S^2 descritto sopra si ricostruisca direttamente dall'equazione di C . Come varietà algebrica, S^2 è identificata alla retta proiettiva $\mathbb{P}^1$, che è la compattificazione, $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1$, di $\mathbb{C}$; è ben noto che i punti di $\mathbb{P}^1$ sono determinati da due coordinate omogenee non entrambe nulle. La seguente applicazione, ϕ , è un morfismo di varietà analitiche

$$C \xrightarrow{\phi} \mathbb{P}^1$$

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : x_1) = \left(\frac{x_1^2}{x_2^2 + x_0 x_1} : 1 \right),$$

dove la seconda espressione, ottenuta dall'equazione di C , serve a dimostrare che ϕ è definita anche nel punto $(0 : 0 : 1)$. Si verifica facilmente che per ogni punto p di $\mathbb{P}^1$, eccetto i punti $(1 : 0)$, $(1 : 1)$, $(1 : -1)$, $(0 : 1)$, si ha $|\phi^{-1}(p)| = 2$, quindi ϕ è un rivestimento di grado 2, ramificato sopra i quattro suddetti punti la cui preimmagine è un solo punto.

7. GEOMETRIA ALGEBRICA E SPAZI DI MODULI

Le nostre curve sono varietà algebriche proiettive di dimensione 1; in generale, una varietà algebrica proiettiva in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^r = \mathbb{CP}^r$ è definita come il luogo degli zeri di un insieme di polinomi omogenei in $r + 1$ variabili. Se una tale varietà è liscia allora è anche una varietà analitica in modo naturale.

Nella precedente sezione abbiamo visto come ad ogni superficie di Riemann, T , si possa associare un modello proiettivo costituito da una curva, C , nel piano $\mathbb{P}^2$. Avendo cambiato categoria (da quella analitica a quella algebrica), non c'è alcuna ragione di limitarsi a $\mathbb{P}^2$, poiché T ha modelli in spazi proiettivi di dimensione arbitrariamente grande, e ammette sempre (infiniti) modelli lisci; sottolineiamo che i modelli lisci sono tutti isomorfi tra loro, essendo isomorfi a T .

Riemann fonda, in [Ri57], la teoria delle curve algebriche e stabilisce alcuni pilastri, come la disuguaglianza di Riemann, più nota nella sua forma forte: il teorema di Riemann-Roch. Questo fondamentale teorema rappresenta il cardine tra la teoria astratta e quella concreta, che studia le varie realizzazioni delle superfici di Riemann come curve algebriche in spazi proiettivi. Il problema a cui risponde è quello di individuare gli spazi proiettivi $\mathbb{P}^r$ nei quali una superficie di Riemann di genere g possa essere realizzata come curva algebrica di grado d (il grado è il massimo numero di punti di intersezione della curva con un iperpiano). La disuguaglianza di Riemann stabilisce che, se $d \geq 2g - 1$, allora è sempre possibile farlo con $r = d - g$. In particolare, se $r = 1$

la superficie è sempre realizzabile come rivestimento di grado $g + 1$ di $\mathbb{P}^1$; ritroviamo così il teorema di esistenza.

Sempre in [Ri57], introduce un nuovo concetto matematico, per il quale utilizza il termine “moduli - *Moduln*”. Riemann intuisce che l’insieme di tutte le superfici/curve aventi genere fissato è esso stesso un oggetto geometricamente interessante, e ne calcola la dimensione. Parafrasando leggermente, in [Ri57, Sez. 12] scrive che se $g \geq 2$, la famiglia di tutte le curve algebriche di genere g , a meno di isomorfismo, dipende da $3g - 3$ variabili continue, che saranno chiamate “moduli” della famiglia. In linguaggio moderno, diciamo che la dimensione dello spazio delle classi di isomorfismo di curve algebriche di genere g è uguale a $3g - 3$ se $g \geq 2$. I casi $g = 0$ e $g = 1$ sono più facili: a meno di isomorfismo, nel primo caso abbiamo un’unica curva algebrica, $\mathbb{P}^1$ o la sfera di Riemann S^2 , mentre nel secondo le strutture analitiche/algebriche su un toro formano uno spazio di dimensione 1. Tutto questo è dimostrato in loc. cit.; il fatto che Riemann introduca il termine speciale “moduli” indica l’innovatività del concetto espresso.

Poco più di un secolo dopo, intorno al 1960, grazie all’evoluzione della geometria algebrica e lo sviluppo di nuove tecniche, sono nati gli “spazi di moduli”, varietà algebriche a tutti gli effetti, i cui punti parametrizzano oggetti geometrici di un certo tipo (per esempio, classi di isomorfismo di curve algebriche di genere fissato), e la cui struttura geometrica è governata dalla dinamica degli oggetti parametrizzati, ossia da come gli oggetti si deformano gli uni negli altri.

Lo spazio dei moduli delle curve lisce di genere g , la cui esistenza Riemann aveva intuito e la cui effettiva costruzione come varietà algebrica è dovuta a Mumford [Mu65], è denotato $\mathcal{M}_g$; questo spazio, prototipo per molti altri spazi di moduli, è stato e continua ad essere uno dei protagonisti della matematica, anche in interazione con la fisica; rimandiamo a [ACG] per approfondimenti.

La teoria dei moduli, che costruisce e studia tali spazi, è di grande attualità; essa consiste in una forma avanzata di classificazione, in quanto le proprietà geometriche degli spazi di moduli rivelano aspetti degli oggetti che essi parametrizzano. Per illustrare questo fenomeno con un esempio non troppo tecnico, consideriamo il fatto, non banale, che $\mathcal{M}_g$ risulta essere connesso anzi, irriducibile (una forma forte di connessione la cui definizione omettiamo). La connessione di $\mathcal{M}_g$ equivale al fatto che, date due qualsiasi curve algebriche lisce dello stesso genere, è possibile trasformare l’una nell’altra in modo continuo, senza mai perdere, durante la deformazione, la struttura di curva algebrica liscia di genere g ; ciò è tutt’altro che scontato vista la quantità di curve di genere g (la dimensione di $\mathcal{M}_g$ tende all’infinito).

Concludiamo mettendo in evidenza un altro aspetto molto attuale: alcuni spazi di moduli risultano essere varietà intrinsecamente interessanti, con proprietà geometriche impreviste, perfino rare. Essi da un lato arricchiscono il panorama della matematica, dall'altro possono essere studiati con gli strumenti della teoria dei moduli la cui denominazione, vogliamo ripeterlo, risale a Riemann.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [Ab41] N. H. Abel. *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes*. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France Paris. 176–264 (1841).
- [ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of algebraic curves. Volume I*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 267. Springer-Verlag (1984).
- [ACG] E. Arbarello, M. Cornalba, and P. Griffiths. *Geometry of algebraic curves. Volume II*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 268. Springer-Verlag (2011).
- [Ga27] C. F. Gauss. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Gottingae, Typis Dieterichianis (1827).
- [Gr76] P. A. Griffiths. *Variations on a Theorem of Abel*. Inventiones math. 35, 321–390 (1976).
- [Ma67] W.S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*. Graduate Texts in Mathematics, 56. Springer-Verlag (1967).
- [MK71] J. Morrow, K. Kodaira. *Complex Manifolds*. Reprint of the 1971 edition with errata. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI (2006).
- [Mu65] D. Mumford. *Geometric Invariant Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, (N.F.), Band 34 Springer-Verlag (1965).
- [Po95] H. Poincaré. *Analysis situs*. Journal de l'École Polytechnique (2) 1: 1–123 (1895).
- [BRcw] *Bernhard Riemann Collected Papers*. Kendrick Press, Inc. (2004).
- [Ri51] B. Riemann. *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. Inauguraldissertation, Universität Göttingen (1851). [BRcw] 3–46.
- [Ri54] B. Riemann. *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Habilitationsschrift, Universität Göttingen (1854). [BRcw] 272–288.
- [Ri57] B. Riemann. *Theorie der Abel'schen Functionen*. J. Reine Angew. Math. 54 (1857), 115–155. [BRcw] 79–134.
- [Ri59] B. Riemann. *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859. [BRcw] 145–153.
- [Se56] J. P. Serre. *Géométrie algébrique et géométrie analytique*. Annales de l'Institut Fourier, Volume 6 1–42 (1956).

(Caporaso) DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA, UNIVERSITÀ ROMA
TRE, LARGO SAN LEONARDO MURIALDO, I-00146 ROMA, ITALY
Email address: `lucia.caporaso@uniroma3.it`