Tutorato 8 CP 110

Mirko Moscatelli, Andrea Gullotto

Giovedì 5 Maggio 2011

Esercizio 1.

Lancio 3 volte una moneta equa. Sia X la variabile aleatoria che mi conta il numero di teste nei primi due lanci e Y il numero di teste nel secondo e terzo lancio.

1. Calcolare la distribuzione congiunta.
2. Sono indipendenti?
3. Calcolare la distribuzione di $Z = X + Y$.

Esercizio 2.

Si consideri una successione di prove indipendenti di Bernoulli, ognuna delle quali sia un successo con probabilita' pari a p. Sia X_1 il numero aleatorio di insuccessi che precedono il primo successo e sia X_2 il numero aleatorio di insuccessi tra il primo e il secondo successo. Si determini la densita' discreta congiunta di X_1 e X_2.

Esercizio 3.

Sia $f(x, y) = c(x^2 + \frac{xy}{2})$con $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 2]$.

- Calcolare c affinchè f sia una densità di probabilità.
- Calcolare la densità marginale di X.
- Calcolare $P(X > Y)$.
- Calcolare $P(Y < 0.5|X < 0.5)$.
- Calcolare $E[X]$.

Esercizio 4.

La densità congiunta di X e Y è:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} Ccos(x)cos(y) & 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < x \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

1. Determinare C affinchè $f_{X,Y}$ sia una densità di probabilità.
2. Determinare se X e Y sono indipendenti.
3. Calcolare $E[X]$.

Esercizio 5.

In un'industria si producono dei macchinari composti di due componenti. Tali macchinari subiscono 3 tipi di guasti: il primo guasto danneggia il primo componente, il secondo guasto il secondo componente e il terzo tipo di guasto danneggia entrambi i componenti. E' noto che i guasti sono indipendenti tra loro e che il tempo T_i in cui l'i-esimo guasto si realizza segue una distribuzione esponenziale di parametro λ_i per $i = 1, 2, 3$. Se X_j sono le variabili aleatorie che indicano i tempi in cui si danneggia il j-esimo componente per $j = 1, 2$, calcolare:

- $P(X_1 > s, X_2 > t)$.
- $P(T_1 \geq 3T_2)$.

Esercizio 6.

Le variabili aleatorie X e Y hanno densità congiunta:

$$f(x, y) = 12xy(1-x) \qquad 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

1. X e Y sono indipendenti?
2. Si determini $E[X]$.
3. Si determini $E[Y]$.
4. Si determini $Var[X]$.
5. Si determini $Var[Y]$.

Esercizio 7.

Date 5 variabili aleatorie $\{X_i\}_{i=1}^5$ indipendenti identicamente distribuite come una $exp(\lambda)$:

- Calcolare la probabilità che la più piccola sia minore di un certo valore a positivo e la probabilità che la più grande sia minore di un certo valore b.
- Estendere il risultato al caso generale di n v.a. X_i indipendenti supponendo nota la loro distribuzione (si sta chiedendo di dare due formule per $P(X_{min} \leq x)$ e $P(X_{max} \leq x)$).

Esercizio 8.

Due punti sono scelti a caso su un segmento di lunghezza L in maniera tale che giacciano nelle due opposte metà del segmento. Indicando con X e Y i due punti, esse sono variabili aleatorie indipendenti tali che X e' distribuita uniformemente sull'intervallo $(0, \frac{L}{2})$ e Y sull'intervallo $(\frac{L}{2}, L)$. Si determini la probabilità che la distanza fra questi due punti sia maggiore di $\frac{L}{3}$.