

Tutorato 9 CP 110

Mirko Moscatelli, Andrea Gullotto

Giovedì 12 Maggio 2011

Esercizio 1.

La densità congiunta di X e Y è:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & y \geq x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Dire se X e Y sono indipendenti.
2. Calcolare le densità marginali di X ed Y e i loro valori attesi.
3. Calcolare il valore atteso di $Y - X$.

Esercizio 2.

Si considerino n lanci indipendenti di una moneta avente probabilità p di dare testa. Diciamo che c'è un cambio se un esito differisce da quello che lo precede. Ad esempio, se $n = 5$ e l'esito è: $TTCTC$, vi sono in tutto 3 cambi. Determinare il valore atteso del numero di cambi.

Esercizio 3.

Un ospedale è situato nel centro di un quadrato i cui lati sono lunghi tre chilometri. Un'ambulanza parte dall'ospedale non appena c'è un incidente. Il sistema di strade è rettangolare, così la distanza in chilometri dall'ospedale, le cui coordinate sono $(0, 0)$, al punto (x, y) è pari a $|x| + |y|$. Se avviene un incidente in un punto che è uniformemente distribuito nel quadrato, determinare il valore atteso della distanza percorsa dall'ambulanza.

Esercizio 4.

Siano X_1, X_2, X_3 e X_4 variabili indipendenti con distribuzione normale standard. Calcolare $P(4X_1 + 3X_2 < X_3 + X_4)$.

Esercizio 5.

Calcolare $E[e^{tX}]$ al variare di $t \in \mathbf{R}$ per le seguenti v.a.:

- $X \sim Po(\lambda)$
- $X \sim Be(p)$
- $X \sim Bin(n, p)$
- $X \sim Exp(\lambda)$
- $X \sim Unif(a, b)$

Esercizio 6.

Sia X una variabile con funzione di densità: $f(x) = \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} \chi_{\{x>0\}}$ con θ parametro reale positivo.

1. Calcolare la media e la varianza di X . (**Suggerimento:** per la media utilizzare prima la formula per l'integrazione per parti, poi il cambiamento di variabile $t = x\sqrt{\frac{2}{\theta}}$ e ricondursi ad un integrale gaussiano noto.)
2. Mostrare che $Z = X^2$ è una $\Gamma(\alpha, \lambda)$ e determinare α e λ . (**Suggerimento:** calcolare la funzione di distribuzione di Z e notare che si tratta della funzione di distribuzione di una esponenziale (di che parametro?) e quindi di una particolare gamma (di quali parametri?))
3. Calcolare la distribuzione di $W = e^{-\frac{x^2}{\theta}}$. (**Suggerimento:** usare il punto 2.)

Esercizio 7.

La densità congiunta di X e Y è:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x}{y}} & 0 < x < 1, 1 < y < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Determinare C affinché $f_{X,Y}$ sia una densità di probabilità.
2. Determinare se X e Y sono indipendenti.
3. Calcolare $E[X]$.