Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2010-11, II semestre
6 giugno, 2011

CP110 Probabilità: Esame del 6 giugno 2011

Testo e soluzione

Nome:______________________________________

1. **(6 pts)** Ci sono 6 palline, di cui 3 nere e 3 rosse. Ciascuna, indipendentemente dalle altre, viene depositata nell'urna A con probabilità $2/3$ e nell'urna B con probabilità $1/3$. Sia X il numero di palline nere nell'urna A e Y il numero di palline rosse nell'urna B.

   (a) Calcolare la densità di probabilità congiunta delle variabili X e Y.

   (b) Calcolare la varianza di $X + Y$.

Soluzione: (a). Numeriamo da 1 a 3 le palline nere e da 4 a 6 le palline rosse. Poiché X dipende solo dalla posizione delle palline $1, 2, 3$ e Y dalla posizione delle palline $4, 5, 6$, e poiché le posizioni delle palline sono indipendenti si ha che X, Y sono indipendenti. La densità congiunta corrisponde alla matrice 4×4 definita da

$$p(i, j) = P(X = i, Y = j),$$

per $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, e $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Per l'indipendenza si ha

$$p(i, j) = p_X(i)p_Y(j) = \binom{3}{i}\left(\frac{2}{3}\right)^i\left(\frac{1}{3}\right)^{3-i}\binom{3}{j}\left(\frac{2}{3}\right)^{3-j}\left(\frac{1}{3}\right)^j$$

dove abbiamo usato il fatto che X è una binomiale di parametri 3 e $2/3$, mentre Y è una binomiale di parametri 3 e $1/3$.

(b). Per l'indipendenza si ha

$$\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] = 3 \times (2/3) \times (1/3) + 3 \times (1/3) \times (2/3) = \frac{4}{3}.$$

Nome:______________________________________

2. **(6 pts)** In un torneo due squadre giocano una serie di partite, e la prima squadra che totalizza tre vittorie vince il torneo. Supponiamo che a ogni partita indipendentemente la probabilità di vittoria della tua squadra sia $p = 1/2$.

   (a) Calcolare la probabilità che la tua squadra vinca il torneo.

   (b) Quante partite in media vengono giocate ?

Soluzione: Per simmetria si deve avere probbilità 1/2 di vittoria. Verifichiamolo. Sia X il numero di partite giocate. Notiamo che $X \in \{3, 4, 5\}$. Allora, se E è l'evento che la nostra squadra vince si ha

$$P(E) = P(E, X = 3) + P(E, X = 4) + P(E, X = 5).$$

Notiamo che $P(E, X = 3) = p^3$ (tre vittorie), $P(E, X = 4) = 3p^2(1-p)p$ (2 vittorie nelle prime tre partite, vittoria nella quarta), e $P(E, X = 5) = \binom{4}{2}p^2(1-p)^2p$ (2 vittorie nelle prime quattro partite, vittoria nella quinta). Quindi

$$P(E) = p^3(1 + 3(1-p) + 6(1-p)^2)$$

Per $p = 1/2$ si ha $P(E) = 1/2$.

La densità di probab. di X è data da

$$\begin{aligned}
P(X = 3) &= P(E, X = 3) + P(E^c, X = 3) = p^3 + (1-p)^3\,, \\
P(X = 4) &= P(E, X = 4) + P(E^c, X = 4) = 3p^3(1-p) + 3p(1-p)^3\,, \\
P(X = 5) &= P(E, X = 5) + P(E^c, X = 5) = 6p^3(1-p)^2 + 6p^2(1-p)^3.
\end{aligned}$$

Quindi

$$E[X] = 3P(X = 3) + 4P(X = 4) + 5P(X = 5) = p^3(3+12(1-p)+30(1-p)^2)+(1-p)^3(3+12p+30p^2).$$

Per $p = 1/2$ si ha $E[X] = 33/8$.

Nome:____

3. **(6 pts)** Il numero di chiamate N_1 ricevute da un operatore telefonico tra le 8:00 e le 9:00 è una variabile di Poisson di parametro $\lambda_1 = 3$. Se entro le 9:00 ha ricevuto meno di 3 chiamate l'operatore chiude il servizio per la giornata, altrimenti lo tiene attivo per un'altra ora. Se il numero di chiamate N_2 ricevute tra le 9:00 e le 10:00 è una variabile di Poisson di parametro $\lambda_2 = 2$ indipendente da N_1, calcolare la probabilità che il numero totale di chiamate ricevute dall'operatore nelle ore di servizio sia uguale a 3, e la probabilità che lo stesso sia uguale a 4.

Soluzione: Sia N il numero totale di chiamate ricevute nelle ore di servizio. Se $N_1 < 3$ l'operatore si ferma quindi si ha $\{N = 3\} = \{N_1 = 3\} \cap \{N_2 = 0\}$. Quindi

$$P(N = 3) = P(N_1 = 3, N_2 = 0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda'} = \frac{9}{2}\,e^{-5} \approx 0.03$$

Allo stesso modo si ottiene che $\{N = 4\} = (\{N_1 = 4\} \cap \{N_2 = 0\}) \cup (\{N_1 = 3\} \cap \{N_2 = 1\})$. Quindi

$$\begin{aligned} P(N = 4) &= P(N_1 = 4, N_2 = 0) + P(N_1 = 3, N_2 = 1) \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^4}{4!}e^{-\lambda'} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda'}\lambda' = \left(\frac{27}{8} + 9\right)\,e^{-5} = \frac{99}{8}\,e^{-5} \approx 0.083 \end{aligned}$$

Nome:____

4. **(6 pts)** Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti con distribuzione uniforme in $[0,1]$. Sia Y_n la variabile aleatoria

$$Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

(a) Si determini il valor medio e la varianza di Y_n in funzione di n.

(b) Si dimostri che la variabile $T_n = nY_n$ converge in distribuzione a una variabile esponenziale di parametro 1, ossia che per ogni $t > 0$ si ha

$$P(T_n \leqslant t) \to 1 - e^{-t}.$$

Soluzione: (a). La variabile Y_n assume valori in $[0,1]$. Calcoliamo la distribuzione di Y_n: per $t \in [0,1]$ abbiamo

$$P(Y_n \leqslant t) = 1 - P(Y_n > t) = 1 - P(X_1 > t, \ldots, X_n > t) = 1 - P(X_1 > t)^n = 1 - (1-t)^n\,.$$

Derivando si ottiene la densità di probab.

$$f_{Y_n}(t) = n(1-t)^{n-1}\,, \qquad t \in [0,1]\,.$$

Il valor medio è

$$E[Y_n] = \int_0^1 t\,n(1-t)^{n-1}dt = -\Big[t(1-t)^n\Big]_0^1 + \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

Il momento secondo è

$$\begin{aligned} E[Y_n^2] &= \int_0^1 t^2\,n(1-t)^{n-1}dt = -\Big[t^2(1-t)^n\Big]_0^1 + \int_0^1 2t(1-t)^n dt \\ &= \int_0^1 2t(1-t)^n dt = -\frac{1}{n+1}\Big[2t(1-t)^{n+1}\Big]_0^1 + \frac{2}{n+1}\int_0^1 (1-t)^{n+1}dt = \frac{2}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Allora

$$\mathrm{Var}[Y_n] = \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

(b). Se $T_n = nY_n$, allora T_n prende valori in $[0,n]$, e per ogni $t \in [0,n]$ abbiamo

$$P(T_n \leqslant t) = P(Y_n \leqslant t/n) = 1 - (1-t/n)^n\,.$$

Passando al limite $n \to \infty$ si ha $P(T_n \leqslant t) \to 1 - e^{-t}$, per ogni $t > 0$ fissato.

Nome:____________________________________

5. **(6 pts)** Una corsa campestre è composta di due tratti A e B. Per un atleta, i tempi di percorrenza (misurati in minuti) del tratto A e del tratto B sono variabili aleatorie indipendenti con valore atteso $\mu_A = 10, \mu_B = 20$, e varianza $\sigma_A^2 = 2$, $\sigma_B^2 = 4$, rispettivamente. Per allenarsi l'atleta corre n volte l'intero percorso e calcola la media empirica dei tempi $\bar{X}_n$ sulle n prove. Assumendo che le prove siano indipendenti, per quale valore di n si ha probabilità circa 0.9 di avere $\bar{X}_n < 31$[1] ?

Soluzione: Sia X_i il tempo alla i-esima prova, cosí che $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$. Per linearità, le X_i hanno (tutte) valore atteso $\mu_A + \mu_B = 30$. Per l'indipendenza dei tratti A e B, ciascuna X_i ha varianza $\sigma_A^2 + \sigma_B^2 = 6$. Allora, se Z è una normale standard, per il teorema del limite centrale si ha

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_n < 31) &= P(X_1 + \cdots + X_n < 31n) \\ &= P\Big((X_1 + \cdots + X_n - 30n)/\sqrt{6n} < n/\sqrt{6n}\Big) \approx P(Z < \sqrt{n/6}) = \Phi(\sqrt{n/6}). \end{aligned}$$

Ponendo $\sqrt{n/6} = 1.28$ si ha $n = 6 \times (1.28)^2 \approx 9.84$, ossia in dieci prove si ha circa probab. 0.9 dell'evento $\bar{X}_n < 31$.

[1] Si utilizzi il fatto che $\Phi(1.28) \approx 0.9$, dove $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

Nome:______________________________________

6. **(6 pts)** Le variabili aleatorie continue X, Y hanno densita' congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-y} & y \geqslant x \geqslant 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Dire se X e Y sono indipendenti.

(b) Calcolare il valore atteso $E[Y - X]$.

(c) Calcolare la varianza $\mathrm{Var}[Y - X]$

Soluzione: (a). X, Y non sono indipendenti poiché la condizione $y \geqslant x \geqslant 0$ non è esprimibile in forma prodotto.

(b). Calcoliamo le densita' marginali:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_x^{\infty} xe^{-y}dy = xe^{-x}\,, \qquad x \geqslant 0$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^{y} xe^{-y}dy = \frac{1}{2}\,y^2 e^{-y}\,, \qquad y \geqslant 0.$$

Riconosciamo dunque che X è Gamma di parametri $\alpha = 2, \lambda = 1$, mentre Y è Gamma di parametri $\alpha = 3, \lambda = 1$. Allora $E[X] = 2$, $E[Y] = 3$. Quindi $E[Y - X] = E[Y] - E[X] = 1$.

(c). Calcoliamo $\mathrm{Var}[Y - X] = \mathrm{Var}[Y] + \mathrm{Var}[X] - 2\mathrm{Cov}(X, Y)$. Si ha

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} x^2 ye^{-y}dy = \int_0^{\infty} x^2(x+1)e^{-x}dx$$

Ricordando che $\int_0^\infty x^{k-1}e^{-x}dx = (k-1)!$ otteniamo $E[XY] = 8$. Quindi $\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 8 - 6 = 2$. La varianza di una $\mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda)$ è $\frac{\alpha}{\lambda^2}$, quindi

$$\mathrm{Var}[Y - X] = 2 + 3 - 2 = 1.$$