Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2010-11, II semestre
11 luglio, 2011

CP110 Probabilità: Esame 11 luglio 2011

Testo e soluzione

Nome:____

1. **(5 pts)** Si consideri un rettangolo di base b e altezza h, dove b e h sono variabili aleatorie uniformi in $[0,1]$ indipendenti. Calcolare la varianza dell'area del rettangolo.

Soluzione: Sia $X = bh$ l'area del rettangolo. Per l'indipendenza di b, h:

$$E[X] = E[bh] = E[b]E[h] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

In maniera similie

$$E[X^2] = E[b^2h^2] = E[b^2]E[h^2] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Quindi $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}$

Nome:______________________________________

2. **(6 pts)** Due dadi vengono lanciati. Calcolare:

   (a) la probabilità che siano tutti e due dispari

   (b) la probabilità che il minimo dei due sia dispari

   (c) la probabilità che il massimo dei due sia dispari

Soluzione: Siano X_1, X_2 le due facce. Allora per l'indipendenza si ha

$$P(\text{tutti e due dispari}) = P(X_1\text{dispari})^2 = [1/2]^2 = 1/4.$$

Il minimo $X = \min\{X_1, X_2\}$ è tale che per ogni $i = 1, \ldots, 6$

$$P(X \geqslant i) = P(X_1 \geqslant i)^2 = [(6 - i + 1)/6]^2.$$

Dunque

$$P(X = i) = P(X \geqslant i) - P(X \geqslant i + 1) = [(6 - i + 1)/6]^2 - [(6 - i)/6]^2.$$

Semplificando:

$$P(X = i) = \frac{1}{36}(13 - 2i)\,, \qquad i = 1, \ldots, 6.$$

Quindi, la probabilità desiderata è

$$P(\text{minimo dispari}) = P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) = \frac{1}{36}[(13-2) + (13-6) + (13-10)] = \frac{7}{12}.$$

Per simmetria si ha $P(\text{massimo dispari}) = P(\text{minimo pari})$. Passando al complementare $P(\text{minimo pari}) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$.

Nome:____

3. **(6 pts)** Si consideri la passeggiata aleatoria con probabilità $1/4$ di spostarsi di $+1$ e probabilità $3/4$ di spostarsi di -1. Sia S la posizione dopo 100 passi, con posizione iniziale $S_0 = 0$.

   (a) Calcolare il valore atteso e la varianza di S.

   (b) Trovare un valore di x tale che la probabilità dell'evento $S + 50 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}x$ sia all'incirca 0.16[1].

Soluzione: Siano B_i v.a. indipendenti con distribuzione di Bernoulli di parametro $p = 1/4$. Allora

$$S = \sum_{i=1}^{100}(2B_i - 1).$$

Quindi per (a) si ha

$$E[S] = 100(2p-1) = -50\,, \quad \mathrm{Var}[S] = 100 \times 4p(1-p) = 300/4$$

Per (b) osserviamo che per il teorema del limite centrale sappiamo che

$$W = \frac{S - E[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} = \frac{S+50}{5\sqrt{3}}$$

approssima una v.a. normale standard. L'evento $S + 50 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}x$ corrisponde a $W \geqslant x/10$ che ha prob. circa $1 - \Phi(x/10)$. Quindi la x deve valere circa 10 per ottenere $1 - \Phi(x/10) = 0.16$.

[1] Si usi il fatto che $\Phi(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \approx 0.84$

Nome:______________________________________

4. **(6 pts)** Un operatore telefonico inizia la sua attività alle ore 8:00. Supponiamo che il tempo (misurato in minuti) di arrivo della prima telefonata e gli intervalli di tempo tra una telefonata e la successiva siano tutte variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{10}$.

   Calcolare:

   (a) la probabilità di non ricevere alcuna chiamata prima delle 8:20;

   (b) la media e la varianza del numero di chiamate ricevute tra le 8:00 e le 10:30.

Soluzione: Ricordando che si tratta di un processo di Poisson di parametro $\lambda = 0.1$ abbiamo che il numero di chiamate tra le 8:00 e le 8:20 è una variabile di Poisson di parametro $20 \times \lambda = 2$. Quindi la prob. richiesta in (a) è e^{-2}. Allo stesso modo numero di chiamate ricevute tra le 8:00 e le 10:30 è una variabile di Poisson di parametro $150 \times \lambda = 15$. Quindi la media e la varianza richieste in (b) sono entrambi pari a 15.

Nome:____

5. **(5 pts)** Nel campionato di football americano, l'azienda responsabile per i test anti-doping mette a punto un nuovo test relativo all'uso di steoridi. Si stima che il test è positivo nel 95% dei casi per chi fa uso di steoridi, ma anche che il test è positivo nel 15% dei casi per chi non ne fa uso. Si stima inoltre che il 10% degli atleti faccia uso di steroidi. Un atleta scelto a caso viene testato.

   (a) Calcolare la probabilità che sia positivo al test.

   (b) Se il test risulta positivo, determinare la probabilità che abbia fatto uso di steroidi.

Soluzione: (a). Sia A l'evento che il test è positivo e sia S l'evento che l'atleta scelto faccia uso di steroidi. Allora

$$P(A) = P(S)P(A|S) + P(S^c)P(A|S^c)$$

Sappiamo che $P(S) = 0.1$, $P(A|S) = 0.95$, $P(A|S^c) = 0.15$, quindi

$$P(A) = (0.1)(0.95) + (0.9)(0.15) = 0.23,$$

ossia, l'atleta scelto risulta positivo al 23%.

(b). Vogliamo $P(S|A)$. Si ha

$$P(S|A) = P(A|S)\frac{P(S)}{P(A)} = (0.95)\frac{0.1}{0.23} \approx 0.41$$

Nome:____

6. **(6 pts)** Le variabili aleatorie continue X, Y hanno densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,x^2y^2 & 1 \geqslant y \geqslant x \geqslant 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   (a) Calcolare c.

   (b) Dire se X e Y sono indipendenti.

   (c) Calcolare il valore atteso di $Y - X$

Soluzione: Abbiamo

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = c\int_0^1 x^2dx \int_x^1 y^2dy = c\int_0^1 x^2\left(\frac{1}{3} - \frac{x^3}{3}\right)dx = \frac{c}{18}$$

Allora $c = 18$. X e Y non sono indipendenti poiché la condizione $1 \geqslant y \geqslant x \geqslant 0$ non descrive un rettangolo. La marginale di X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = cx^2\int_x^1 y^2dy = \frac{c}{3}(x^2 - x^5) = 6(x^2 - x^5)\,, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

La marginale di Y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = cy^2\int_0^y x^2dx = \frac{c}{3}\,y^5 = 6\,y^5\,, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Il valore atteso di X:

$$E[X] = \int_0^1 6(x^2 - x^5)xdx = \frac{6}{4} - \frac{6}{7} = \frac{9}{14}$$

Il valore atteso di Y:

$$E[Y] = \int_0^1 6y^5ydy = \frac{6}{7}$$

Allora $E[Y - X] = E[Y] - E[X] = \frac{3}{14}$.