Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2010-11, II semestre
2 settembre, 2011

CP110 Probabilità: Esame 2 settembre 2011

Testo e soluzione

Nome:____

1. **(5 pts)** Nel gioco dello Yahtzee si lanciano cinque dadi. Dire se è piú probabile ottenere *scala* (5 dadi ordinabili in maniera crescente, es: 2-4-1-3-5) oppure *full* (3 dadi di un tipo e 2 di un altro, es: 4-2-2-4-4).

Soluzione: Lo spazio campionario è fatto di 6^5 esiti (6 possibilità per ognuno dei 5 dadi). Calcoliamo quanti di questi esiti realizzano l'evento *scala*. A parte le 5! permutazioni dei 5 dadi abbiamo due scale differenti, 1-2-3-4-5 oppure 2-3-4-5-6. Quindi il numero totale di esiti è $2 \times 5! = 240$, e la probabilità di una scala vale $240/6^5$. L'evento *full* è composto da tutti gli esiti della forma y-x-y-x-y con x diverso da y. Se ci sono 6 possibili scelte della x, si hanno 5 possibili scelte per la y. Inoltre ci sono $\binom{5}{2} = 10$ possibili modi di scegliere la posizione delle due x. Quindi il full si realizza in $6 \times 5 \times 10 = 300$ modi, e ha probabilità $300/6^5$, ossia il full è piú probabile della scala.

Nome:______________________________________

2. **(6 pts)** Una bambina produce 3 bolle di sapone. Supponendo che le bolle siano sfere con raggi descritti da 3 variabili aleatorie indipendenti e uniformemente distribuite tra 0 e 10 centimetri, calcolare il valore atteso del volume della bolla piú grande.

Soluzione: Siano r_1, r_2, r_3 i tre raggi delle bolle, e sia $R = \max\{r_1, r_2, r_3\}$ il raggio della bolla piú grande. Osserviamo che se r_i è misurato in centimetri, abbiamo

$$P(r_i \leqslant t) = \frac{t}{10}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10.$$

Allora R è una v.a. continua con funzione di distribuzione

$$F(t) = P(R \leqslant t) = P(r_1 \leqslant t, r_2 \leqslant t, r_3 \leqslant t) = P(r_1 \leqslant t)^3 = \left(\frac{t}{10}\right)^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10.$$

La densità di R è data da

$$f(r) = \frac{d}{dr} F(r) = \frac{3}{10} \left(\frac{r}{10}\right)^2.$$

Il valor medio del volume della bolla più grande è

$$E[V] = E[\frac{4}{3}\pi R^3] = \frac{4}{3}\pi E[R^3].$$

Si ha

$$E[R^3] = \int_0^{10} r^3 f(r) dr = \frac{3}{10^3} \int_0^{10} r^5 dr = \frac{3}{10^3} \frac{10^6}{6} = 500.$$

Quindi $E[V] = 2000 \times \frac{\pi}{3}$ centimetri cubi.

Nome:____

3. **(6 pts)** Si considerino due passeggiate aleatorie indipendenti che partono insieme nell'origine, la prima con probabilità $2/3$ di spostarsi di $+1$ e probabilità $1/3$ di spostarsi di -1, la seconda con probabilità $1/2$ di spostarsi di $+1$ e probabilità $1/2$ di spostarsi di -1. Siano X_n e Y_n le rispettive posizioni dopo n passi.

   (a) Calcolare il valore atteso e la varianza di $X_n - Y_n$ al variare di n.

   (b) Quanto vale per n grande la probabilità dell'evento $X_n - Y_n \geqslant \frac{n}{3}$?.

Soluzione: Scriviamo $X_n = \sum_{i=1}^n (2Z_i - 1)$ dove Z_i sono v.a. indipendenti Bernoulli(2/3) e $Y_n = \sum_{i=1}^n (2W_i - 1)$ dove W_i sono v.a. indipendenti Bernoulli(1/2). Allora

$$X_n - Y_n = 2\sum_{i=1}^n (Z_i - W_i).$$

Per linearità il valor medio di $X_n - Y_n$ è

$$E[X_n - Y_n] = 2nE[Z_1 - W_1] = 2n(2/3 - 1/2) = \frac{1}{3}\,n.$$

Inoltre per l'indipendenza si ha che la varianza vale

$$\mathrm{Var}[X_n - Y_n] = 4n\mathrm{Var}[Z_1 - W_1] = 4n(\mathrm{Var}[Z_1] + \mathrm{Var}[W_1]) = 4n(2/9 + 1/4) = \frac{17}{9}\,n.$$

Per il punto (b), osserviamo che per il teorema del limite centrale, la variabile

$$G_n = \frac{X_n - Y_n - E[X_n - Y_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X_n - Y_n]}}$$

è approssimativamente una normale standard. L'evento $X_n - Y_n \geqslant \frac{n}{3}$ coincide con l'evento $G_n \geqslant 0$ e pertanto ha probabilità circa $1/2$ per n grandi.

Nome:______________________________________

4. **(6 pts)** Un commerciante acquista 2000 cinture di pelle. Secondo il modello ogni cintura ha 5 fori, ma per via di un difetto di fabbrica si stima che lo 0.2% delle cinture ha meno di 4 fori, e che lo 0.5% delle cinture ha meno di 5 fori. Utilizzando l'approssimazione poissoniana si determini la probabilità che il commerciante abbia

   (a) nessuna cintura con meno di 4 fori

   (b) almeno 2 cinture con esattamente 4 fori.

Soluzione: Chiamiamo X il numero di cinture con meno di 4 fori, che assumiamo essere una v.a. di Poisson. Il parametro λ_X è dato da $0.002 \times 2000 = 4$. Quindi la probabilità che il commerciante abbia nessuna cintura con meno di 4 fori è

$$P(X = 0) = e^{-\lambda_X} = e^{-4}.$$

Sia ora Y il numero di cinture con esattamente 4 fori. Allora Y è una v.a. di Poisson con $\lambda_Y = (0.005 - 0.002) \times 2000 = 6$. Quindi si ha

$$P(Y \geqslant 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) = 1 - e^{-\lambda_Y} - \lambda_Y e^{-\lambda_Y} = 1 - 7e^{-6}.$$

Nome:____

5. **(5 pts)** Siano X, Y due variabili aleatorie binomiali indipendenti con medesimi parametri n e p. Per ogni $m \in \{0, \ldots, 2n\}$, si determini la denistà di probabilità discreta della X condizionata all'evento $X + Y = m$.

Soluzione: Abbiamo

$$P(X = k \,|\, X + Y = m) = \frac{P(X = k, Y = m - k)}{P(X + Y = m)} = \frac{P(X = k)P(Y = m - k)}{P(X + Y = m)}.$$

Osserviamo che $X + Y$ è una binomiale di parametri $2n$ e p, quindi

$$P(X = k \,|\, X + Y = m) = \frac{\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \binom{n}{m-k} p^{m-k} (1 - p)^{n-m+k}}{\binom{2n}{m} p^m (1 - p)^{2n-m}} = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}}$$

Osserviamo che, condizionatamente all'evento $X+Y = m$, la X ha distribuzione ipergeometrica.

Nome:______________________________________

6. **(6 pts)** Le variabili aleatorie continue X, Y hanno densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & x \in [0,1],\ y \in [0,\infty) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   (a) Dire se X e Y sono indipendenti.

   (b) Calcolare la varianza di $X + Y$.

Soluzione: poiché la condizione $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y < \infty$ è di tipo rettangolare, e la denistà $e^{-y} = h(x)g(y)$ è in forma prodotto con $h(x) = 1$ e $g(y) = e^{-y}$, notiamo che X e Y *sono* indipendenti. Inoltre osserviamo che X è uniforme $[0,1]$ mentre Y è esponenziale di parametro 1. Allora, per l'indipendenza, si ha

$$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] = \frac{1}{12} + 1 = \frac{13}{12}.$$