Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2010-11, II semestre
30 gennaio, 2012

CP110 Probabilità: Esame 30 gennaio 2012

Testo e soluzione

Nome:______________________________________

1. **(5 pts)** Un gioco consiste in n prove ripetute, tali che ad ogni prova si vincono 5 euro con probabilità 1/4, 10 euro con probabilità 1/4 e zero con probabilità 1/2.

   (a) Calcolare il valore atteso della vincita dopo n prove.

   (b) Assumendo le prove indipendenti, calcolare la probabilità di vincere 10 euro dopo 4 prove.

Soluzione: (a). Il valore atteso in una singola prova è $5 \times 1/4 + 10 \times 1/4 = 15/4$. Pertanto il valore atteso su n prove è $15n/4$.
(b). Si vincono dieci euro facendo 10 una volta e zero 3 volte oppure facendo 5 due volte e zero due volte. Il primo evento ha probabilità $4 \times (1/2)^3 \times 1/4 = 1/8$, mentre il secondo evento ha probabilità $\binom{4}{2} \times (1/2)^2 \times (1/4)^2 = 3/32$. Quindi la probabilità richiesta è $7/32$.

Nome:____

2. **(5 pts)** Un mazzo di 15 carte è formato da 5 assi di cuori, 5 assi di picche e 5 assi di quadri. Supponendo di aver mischiato bene il mazzo, calcolare la probabilità degli eventi

   (a) le prime 3 carte estratte sono tutte differenti

   (b) le prime 3 carte estratte sono tutte uguali

Soluzione: Quale spazio campionario possiamo scegliere l'insieme delle $\frac{15!}{5!5!5!}$ sequenze distinte ottenibili con il mazzo dato.
(a). Se togliamo dal mazzo tre assi differenti rimangono 12 carte, che si possono disporre in $\frac{12!}{4!4!4!}$ sequenze distinte. Poiché i tre assi iniziale possono essere disposti in $3! = 6$ sequenze distinte, si ha che la probabilità richiesta è

$$\frac{6 \times \frac{12!}{4!4!4!}}{\frac{15!}{5!5!5!}} = \frac{25}{91}$$

(b). Se si tolgono dal mazzo tre assi di picche rimangono 12 carte, che si possono disporre in $\frac{12!}{5!5!2!}$ sequenze distinte. Lo stesso vale se togliamo 3 assi di cuori oppure 3 assi di quadri. Quindi la probabilità richiesta è

$$\frac{3 \times \frac{12!}{5!5!2!}}{\frac{15!}{5!5!5!}} = \frac{6}{91}$$

Nome:____

3. **(7 pts)** Si considerino due passeggiate aleatorie indipendenti che partono insieme nell'origine, la prima con probabilità 3/4 di spostarsi di +1 e probabilità 1/4 di spostarsi di −1, la seconda con probabilità 1/2 di spostarsi di +1 e probabilità 1/2 di spostarsi di −1. Siano X_n e Y_n le rispettive posizioni dopo n passi.

   (a) Calcolare il valore atteso e la varianza di $aX_n - bY_n$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Calcolare $\lim_{n\to\infty} P(aX_n - bY_n \geqslant n)$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

Soluzione: Scriviamo $X_n = \sum_{i=1}^n (2Z_i - 1)$ dove Z_i sono v.a. indipendenti Bernoulli(3/4) e $Y_n = \sum_{i=1}^n (2W_i - 1)$ dove W_i sono v.a. indipendenti Bernoulli(1/2). Allora

$$aX_n - bY_n = 2\sum_{i=1}^n (aZ_i - bW_i) + (b-a)n.$$

Per linearità il valor medio di $aX_n - bY_n$ è

$$E[aX_n - bY_n] = 2nE[aZ_1 - bW_1] + (b-a)n = 2n(3a/4 - b/2) + (b-a)n = a\,\frac{n}{2}.$$

Inoltre per l'indipendenza si ha che la varianza vale

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[aX_n - bY_n] &= 4n\mathrm{Var}[aZ_1 - bW_1] = 4n(a^2\mathrm{Var}[Z_1] + b^2\mathrm{Var}[W_1]) \\ &= 4n(a^2 3/16 + b^2 1/4) = (3a^2/4 + b^2)n\end{aligned}$$

Per il punto (b), osserviamo che per il teorema del limite centrale, la variabile

$$G_n = \frac{aX_n - bY_n - E[aX_n - bY_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}[aX_n - bY_n]}}$$

è approssimativamente una normale standard. L'evento $aX_n - bY_n \geqslant n$ coincide con l'evento

$$G_n \geqslant \frac{n - E[aX_n - bY_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}[aX_n - bY_n]}} = \frac{(1-a/2)\sqrt{n}}{\sqrt{3a^2/4 + b^2}}.$$

Se $a > 2$ si ha $P(aX_n - bY_n \geqslant n) \to 1$. Infatti, fissato $\kappa > 0$, se n e' abbastanza grande e $a > 2$, si ha che $\frac{(1-a/2)\sqrt{n}}{\sqrt{3a^2/4+b^2}} \leqslant -\kappa$ e quindi

$$P(aX_n - bY_n \geqslant n) \geqslant P(G_n \geqslant -\kappa).$$

Per il teorema del limite centrale $P(G_n \geqslant -\kappa) \to \Phi(\kappa)$ dove Φ e' la funzione di distribuzione della normale standard. Allora

$$\liminf_{n\to\infty} P(aX_n - bY_n \geqslant n) \geqslant \Phi(\kappa)$$

per ogni $\kappa > 0$. Prendendo $\kappa \to \infty$ si vede che $P(aX_n - bY_n \geqslant n) \to 1$.
In maniera del tutto analoga si dimostra che $P(aX_n - bY_n \geqslant n) \to 0$ per $a < 2$. Per $a = 2$ si ha che $aX_n - bY_n \geqslant n$ equivale a $G_n \geqslant 0$. Quindi $P(aX_n - bY_n \geqslant n) = P(G_n \geqslant 0) \to \Phi(0) = \frac{1}{2}$.
Notiamo che il valore di b e' ininfluente ai fini del calcolo del limite richiesto.

Nome:____

4. **(6 pts)** Sia X un punto scelto uniformemente nel rettangolo R di base 4 e altezza 2 centrato nell'origine di $\mathbb{R}^2$. Sia D la distanza di X dall'origine e sia Q il quadrato di lato 2 centrato nell'origine. Calcolare

   (a) la probabilità dell'evento $D > 1$

   (b) la probabilità condizionata di $X \in Q$ dato l'evento $D > 1$.

Soluzione: Se C e' il disco di raggio 1 centrato nell'origine allora $D > 1$ equivale a $X \notin C$. La probabilita' di $X \in C$ e' $Area(C)/Area(R) = \pi/8$. Quindi $P(D > 1) = 1 - \pi/8$. La probabilita' condizionata si ottiene come

$$P(X \in Q | D > 1) = \frac{P(X \in Q \setminus C)}{P(D > 1)} = \frac{4 - \pi}{8 - \pi},$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$P(X \in Q \setminus C) = Area(Q \setminus C)/Area(R) = (4 - \pi)/8.$$

Nome:______________________________________

5. **(6 pts)** Si considerino lanci ripetuti di un dado. Sia T_1 il numero di lanci necessari per ottenere 6 per la prima volta e sia T_2 il numero di lanci per ottenere 6 per la seconda volta. Calcolare

   (a) la probabilita' congiunta $P(T_1 = j, T_2 = k)$ per ogni $j, k = 1, 2, \ldots$.

   (b) il valore atteso di T_2

Soluzione: Poiche' $T_2 > T_1$ sappiamo che $P(T_1 = j, T_2 = k) = 0$, se $j \geqslant k$. Se $j < k$ allora l'evento $T_1 = j, T_2 = k$ equivale a: nessun 6 nei lanci $1, \ldots, j-1$, 6 nel lancio j, nessun 6 nei lanci $j+1, \ldots, k-1$, 6 nel lancio k. Ponendo $p = 1/6$, per l'indipendenza si ha allora

$$P(T_1 = j, T_2 = k) = (1-p)^{j-1} p (1-p)^{k-j-1} p = (1-p)^{k-2} p^2, \qquad 1 \leqslant j < k.$$

Per calcolare $E[T_2]$ scriviamo la densita' discreta di T_2: per $k \geqslant 2$,

$$P(T_2 = k) = \sum_{j=1}^{\infty} P(T_1 = j, T_2 = k) = \sum_{j=1}^{k-1} (1-p)^{k-2} p^2 = (k-1)(1-p)^{k-2} p^2.$$

Allora,

$$E[T_2] = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} p^2 = p^2 \frac{d^2}{dp^2} \sum_{k=2}^{\infty} (1-p)^k = p^2 \frac{d^2}{dp^2} (p^{-1} - 1 - (1-p)).$$

Usando $\frac{d^2}{dp^2}(p^{-1} - 1 - (1-p)) = \frac{d^2}{dp^2} p^{-1} = 2p^{-3}$, si ha $E[T_2] = 2/p$.

Allo stesso risultato si puo' giungere osservando che T_2 e' la somma di due variabili geometriche di parametro p, ciascuna con valore atteso $E[T_1] = 1/p$.

Nome:____

6. **(6 pts)** Le variabili aleatorie continue X, Y hanno densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} c\, e^{-(x+3y)} & x \in [0,\infty],\ y \in [0,\infty) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare c.

(b) Dire se X e Y sono indipendenti.

(c) Calcolare la varianza di $X - Y$.

Soluzione: L'integrale di f su $\mathbb{R}^2$ vale

$$\int\int f(x,y)dxdy = c\int_0^\infty e^{-x}dx \int_0^\infty e^{-3y}dy = c/3.$$

Quindi $c = 3$.

Poiché la condizione $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$ è di tipo rettangolare, e la denistà $3e^{-x-3y} = h(x)g(y)$ è in forma prodotto con $h(x) = e^{-x}$ e $g(y) = 3e^{-3y}$, notiamo che X e Y sono indipendenti.

Inoltre osserviamo che X e' esponenziale di parametro 1 e Y esponenziale di parametro 3. Usando il fatto che la varianza di un'esponenziale di parametro λ vale $1/\lambda^2$, e usando l'indipendenza, si ha

$$\mathrm{Var}[X - Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] = 1 + 1/9 = \frac{10}{9}.$$