Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2010-11, II semestre
12 aprile, 2011

CP110 Probabilità: Esonero 1

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si puo' usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	totale
punti						
su	8	8	7	8	7	38

Nome:____

1. **(8 pts)** Si consideri la passeggiata aleatoria con probabilità p di spostarsi a destra e probabilità $1-p$ di spostarsi a sinistra. Sia S_n la posizione dopo n passi, con posizione iniziale $S_0 = 0$.

   (a) Calcolare il valore atteso e la varianza di S_n.

   (b) Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $X = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$.

Soluzione: Siano X_i v.a. di Bernoulli (p) indipendenti. Allora $S_n = \sum_{i=1}^n (2X_i - 1)$. Quindi $S_n = 2B_n - n$ dove B_n è la v.a. binomiale (n,p). Allora $E[S_n] = 2E[B_n] - n = n(2p-1)$. Inoltre $\mathrm{Var}[X] = 4\mathrm{Var}[B_n] = 4np(1-p)$.

Calcoliamo

$$E[X] = E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\right] = E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2B_n - n}\right] = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-n} E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2B_n}\right]$$

Si ha

$$\begin{aligned} E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{2B_n}\right] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{2k} \\ &= (1-p)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1-p}{p}\right)^k = (1-p)^n \left(1 + \frac{1-p}{p}\right)^n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^n. \end{aligned}$$

In conlcusione

$$E[X] = E\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\right] = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-n} \left(\frac{1-p}{p}\right)^n = 1.$$

Nome:____

2. **(8 pts)** Un'urna contiene inizialmente 2 palline rosse e 3 palline blu. A ogni passo, una pallina viene estratta a caso. Se è rossa viene rimessa dentro l'urna insieme a altre 2 palline rosse; se è blu viene rimessa dentro insieme a altre 3 palline blu. Calcolare

   (a) La probabilità di estrarre una pallina rossa al secondo passo.

   (b) La probabilità di avere estratto una pallina rossa al primo passo sapendo che la pallina estratta al secondo passo è blu.

Soluzione: Poniamo $r = 2$ e $b = 3$. Sia A l'evento di aver estratto una pallina rossa alla prima estrazione, E l'evento di estrarre una pallina rossa alla seconda estrazione. Allora $P(A) = r/(r+b)$, e $P(E|A) = 2r/(2r+b)$. Inoltre $P(A^c) = b/(r+b)$ e $P(E|A^c) = r/(r+2b)$. Per rispondere al punto (a) calcoliamo:

$$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|A^c)P(A^c) = \frac{2r}{2r+b}\,\frac{r}{r+b} + \frac{r}{r+2b}\,\frac{b}{r+b} = \frac{53}{140}$$

Per il punto (b) osserviamo che

$$P(A|E^c) = \frac{P(E^c|A)P(A)}{P(E^c)} = \frac{b}{2r+b}\,\frac{r}{r+b}\,\frac{1}{1-P(E)} = \frac{24}{87} = \frac{8}{29}.$$

Nome:______________________________________

3. **(7 pts)** n persone vanno a cena. Diciamo che la cena e' k-bilanciata se in ogni sottoinsieme di k persone tra le n ci sono almeno due persone che si conoscono tra loro e almeno due persone che non si conoscono tra loro. E' noto che non è possibile organizzare una cena tra 6 persone che sia 3-bilanciata. Utilizzare il metodo probabilistico per dimostrare che invece è possibile organizzare una cena tra 6 persone che sia 4-bilanciata.

Soluzione: Possiamo vedere 6 persone come i vertici di un grafo completo i cui lati sono colorati di bianco se due persone non si conoscono, di nero se si conoscono. Ci sono $\binom{6}{2} = 15$ lati nel grafo completo con 6 vertici. Dobbiamo dimostrare che esiste una colorazione dei 15 lati tale che nessun sottografo completo di 4 vertici è tutto bianco oppure tutto nero. Notiamo che ci sono $\binom{6}{4} = 15$ sottografi completi. A questo fine utilizziamo il metodo probabilistico, che consiste nel colorare a caso ogni lato di bianco o di nero indipendentemente dagli altri. Poniamo $n = 6$, $k = 4$, $m = \binom{n}{k} = 15$. Numeriamo i sottografi da 1 a m e poniamo E_i, $i = 1, \ldots, m$ per l'evento che il sottografo i è tutto bianco oppure tutto nero. Ci sono $\binom{k}{2}$ lati nel sottografo i. Per l'indipendenza si ha

$$P(E_i) = 2^{-\binom{k}{2}+1}.$$

Ora possiamo stimare la probabilità che uno dei sottografi sia monocromatico con

$$P(\cup_{i=1} E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m} P(E_i) = m 2^{-\binom{k}{2}+1},$$

dove abbiamo usato la nota disuguaglianza per l'unione di eventi. Osserviamo che per $n = 6$, $k = 4$, $m = 15$ si ha

$$P(\cup_{i=1} E_i) \leqslant 15 \times 2^{-5} < 1.$$

Quindi si ha probabilità positiva per l'evento desiderato che nessun sottografo sia monocromatico. Ciò mostra che esiste la possibilità che un gruppo di 6 persone si 4-bilanciato.

Nome:______________________________________

4. **(8 pts)** A ogni unità di tempo indipendentemente si lanciano due monete. Sia X il primo tempo al quale si ha testa in almeno una delle due monete, e sia Y il primo tempo al quale si ha testa in tutte e due le monete. Trovare

   (a) i valro attesi $E[X]$ e $E[Y]$.

   (b) $P(Y > 2 \,|\, X = 2)$.

   (c) $P(X = Y)$

Soluzione: Osserviamo che X è una v.a. geometrica di parametro $p_X = 1 - P(\text{nessuna testa}) = 3/4$, mentre Y è una v.a. geometrica di parametro $p_Y = P(\text{due teste}) = 1/4$. Ricordando che la geometrica di parametro p ha media $1/p$ si ha $E[X] = 4/3$, $E[Y] = 4$.
la probabilità $P(Y > 2 \,|\, X = 2)$ si può calcolare come

$$P(Y > 2 \,|\, X = 2) = \frac{P(\{Y > 2\} \cap \{X = 2\})}{P(X = 2)}.$$

Ora, $P(X = 2) = (1 - p_X)p_X = 3/16$. L'evento $\{Y > 2\} \cap \{X = 2\}$ consiste nell'evento che il primo lancio risulta "nessuna testa" e il secondo lancio risulta "una sola testa". Poiché $P(\text{una sola testa}) = 1/2$ per l'indipendenza si ha

$$P(\{Y > 2\} \cap \{X = 2\}) = (1 - p_X)\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Quindi $P(Y > 2 \,|\, X = 2) = 2/3$.
Scriviamo

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\{Y = k\} \cap \{X = k\}).$$

L'evento $\{Y = k\} \cap \{X = k\}$ consiste nell'evento "nessuna testa nei primi $k - 1$ lanci", e "due teste nel k-esimo lancio". Allora

$$P(\{Y = k\} \cap \{X = k\}) = (1 - p_X)^{k-1} p_Y$$

In conclusione,

$$P(X = Y) = p_Y \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p_X)^{k-1} = \frac{p_Y}{p_X} = \frac{1}{3}.$$

Nome:______________________________________

5. **(7 pts)** Supponiamo che l'1% dei soldatini prodotti da un fabbrica sia inutilizzabile a causa di un difetto. Un bambino acquista 200 soldatini.

   (a) Calcolare il numero medio di soldatini utilizzabili.

   (b) Tramite l'approssimazione poissoniana, calcolare la probablità che il numero di soldatini utilizzabili sia almeno 198.

Soluzione: Il valore atteso del numero di soldatini inutilizzabili è $200 \times 0.01 = 2$, quindi ne restano in media 198 utilizzabili. Sia X il numero di quelli difettosi. Allora X è approssimata da una v.a. di Poisson di parametro $\lambda = E[X] = 2$. Per averne almeno 198 utilizzabili, si deve avere $X \leqslant 2$, e con l'approssimazione poissoniana si ha

$$P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = e^{-2}\left(1 + 2 + 2^2/2!\right) = 5e^{-2}.$$

Nome:____