Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2010-11, II semestre
12 aprile, 2011

CP110 Probabilità: Esonero 1

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si puo' usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	totale
punti						
su	8	8	8	6	8	38

Nome:____

1. **(8 pts)** Si consideri il lancio di due dadi, A e B. Sia X la funzione indicatrice dell'evento che il dado A e' pari e sia Y la funzione indicatrice dell'evento che il dado B e' minore o uguale a 2. Si calcoli

   (a) Il valor medio e la varianza di $Z = X - Y$.

   (b) La tabella corrispondente alla densita' congiunta di $W = X + Y$ e $Z = X - Y$.

Soluzione: (a). Poniamo $p = P(A \text{ pari}) = E[X] = \frac{1}{2}$ e $q = P(B \in \{1,2\}) = E[Y] = \frac{1}{3}$. Per linearita' si ha

$$E[Z] = E[X] - E[Y] = p - q = \frac{1}{6}.$$

Inoltre

$$\mathrm{Var}[Z] = \mathrm{Var}[X - Y] = \mathrm{Var}[X] - 2\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Var}[Y].$$

Si ha $\mathrm{Var}[X] = p(1-p) = 1/4$ e $\mathrm{Var}[Y] = q(1-q) = 2/9$. Per l'indipendenza abbiamo $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Quindi

$$\mathrm{Var}[Z] = p(1-p) + q(1-q) = \frac{17}{36}.$$

(b). La tabella richiesta corrisponde alla matrice 3×3 definita da

$$p(i,j) = P(X + Y = i, X - Y = j),$$

per $i \in \{0,1,2\}$, e $j \in \{-1,0,1\}$. Attraverso semplici considerazioni si ottiene

$$\begin{pmatrix} p(0,-1) & p(0,0) & p(0,1) \\ p(1,-1) & p(1,0) & p(1,1) \\ p(2,-1) & p(2,0) & p(2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Nome:____

2. **(8 pts)** Le variabili aleatorie continue X, Y hanno densita' congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 6(y-x) & 1 \geqslant y \geqslant x \geqslant 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Dire se X e Y sono indipendenti.

(b) Calcolare i valori medi $E[X]$ e $E[Y]$.

(c) Calcolare la covarianza $\mathrm{Cov}(X,Y)$

Soluzione:

(a). X, Y non sono indipendenti, per esempio la condizione $1 \geqslant y \geqslant x \geqslant 0$ non e' esprimibile in forma prodotto.

(b). Calcoliamo le densita' marginali:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_x^1 6(y-x)dy = 3(1-x)^2\,, \qquad 1 \geqslant x \geqslant 0$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^y 6(y-x)dx = 3y^2\,, \qquad 1 \geqslant y \geqslant 0.$$

Allora

$$E[X] = \int_0^1 3(1-x)^2 x dx = \frac{1}{4},$$

mentre

$$E[Y] = \int_0^1 3y^3 dy = \frac{3}{4}.$$

(c). Calcoliamo

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy \\ &= 6\int_0^1 dy \int_0^y xy(y-x)dy = \int_0^1 y^4 dy = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 1/5 - 3/16 = 1/80$.

Nome:______________________________________

3. **(7 pts)** Sia $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$, dove $X_1, \ldots, X_n$ sono variabili aletaorie indipendenti con distribuzione uniforme in $[0,1]$. Si consideri la probabilita' dell'evento $\{\bar{X}_n < 0.51\}$ al variare di n.

   (a) Cosa permette di concludere la legge dei grandi numeri per grandi valori di n ?

   (b) Si determini approssimativamente per quale valore di n questa probabilita' vale circa 0.84[1].

Soluzione: Le X_i hanno media 0.5 e varianza 1/12. La legge dei grandi numeri stabilisce che

$$P(|\bar{X}_n - 0.5| < \epsilon) \to 1$$

per $n \to \infty$ per ogni valore di $\epsilon > 0$. In particolare, $P(\bar{X}_n < 0.51) \approx 1$ per n grandi.
Per il teorema del limite centrale

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_n < 0.51) &= P(X_1 + \cdots + X_n < 0.51n) \\ &= P((X_1 + \cdots + X_n - 0.5n)/\sqrt{n/12} < 0.01n/\sqrt{n/12}) \\ &\approx \Phi(0.01n/\sqrt{n/12}) = \Phi(0.01\sqrt{12n}) \end{aligned}$$

Poiche' $\Phi(1) \approx 0.84$ si deve avere $0.01\sqrt{12n} \approx 1$, ossia $n \approx 10000/12 \approx 833$.

[1] Si usi il fatto che $\Phi(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \approx 0.84$

Nome:____

4. **(8 pts)** Sia Q un punto scelto a caso uniformemente in un quadrato di lato 1, e sia D la distanza di Q dal centro del quadrato. Calcolare il valor medio $E[D^2]$.

Soluzione:

Senza perdita di generalita' fissiamo il centro del quadrato nell'origine del piano e orientiamo gli assi coordinati parallelamente ai lati del quadrato. Siano X, Y le coordinate del punto Q. Notiamo che X e Y hanno entrambi distribuzione uniforme in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, e $D^2 = X^2 + Y^2$. Ne segue che

$$E[D^2] = 2E[X^2] = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{6}$$

Nome:______________________________________

5. **(7 pts)** Uno studente possiede due telefoni A e B che ricevono chiamate secondo due processi di Poisson indipendenti. In media, in un'ora, A riceve 2 chiamate e B riceve 1 chiamata. Supponiamo che lo studente accenda contemporaneamente i due telefoni. Calcolare la probabilita' degli eventi

   (a) La prima chiamata ricevuta da B precede la prima chiamata ricevuta da A.

   (b) La terza chiamata ricevuta da A precede la prima chiamata ricevuta da B.

Soluzione:

Sia S_k^A il tempo di arrivo della k-esima chiamata per A e sia S_k^B il tempo di arrivo della k-esima chiamata per B. Per l'ipotesi di indipendenza si ha che per ogni k, ℓ, le variabili aleatorie S_k^A e S_ℓ^B sono indipendenti. Inoltre sappiamo che S_k^A e' una Gamma(k, λ_A) e S_k^B e' una Gamma(k, λ_B) dove $\lambda_A = 2$ e $\lambda_B = 1$ (se misuriamo il tempo in ore). In particolare, sappiamo che la densita' congiunta di S_k^A, S_ℓ^B e'

$$f(x,y) = \frac{\lambda_A^k x^{k-1} e^{-\lambda_A x}}{(k-1)!} 1_{\{x>0\}} \frac{\lambda_B^\ell x^{\ell-1} e^{-\lambda_B y}}{(\ell-1)!} 1_{\{y>0\}}.$$

(a). Cerchiamo $P(S_1^B < S_1^A)$. La densita' congiunta di S_1^B, S_1^A e'

$$f(x,y) = \lambda_A e^{-\lambda_A x} \lambda_B e^{-\lambda_B y} 1_{\{x>0, y>0\}}.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} P(S_1^B < S_1^A) &= \int_0^\infty \lambda_A e^{-\lambda_A x} dx \int_0^x \lambda_B e^{-\lambda_B y} dy \\ &= \int_0^\infty \lambda_A e^{-\lambda_A x}(1 - e^{-\lambda_B x}) dx = 1 - \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(b). Cerchiamo $P(S_3^A < S_1^B)$. La densita' congiunta di S_3^A, S_1^B e'

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \lambda_A^3 x^2 e^{-\lambda_A x} \lambda_B e^{-\lambda_B y} 1_{\{x>0, y>0\}}.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} P(S_3^A < S_1^B) &= \int_0^\infty \lambda_A e^{-\lambda_A x} dx \int_x^\infty \lambda_B e^{-\lambda_B y} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{2} \lambda_A^3 x^2 e^{-\lambda_A x} e^{-\lambda_B x} dx = \frac{\lambda_A^3}{(\lambda_A + \lambda_B)^3} = \frac{8}{27}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che per ogni $a > 0$ e $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^\infty x^{k-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(k)}{a^k} = \frac{(k-1)!}{a^k}.$$

Nome:____