Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2010-11, II semestre
5 giugno, 2012

CP110 Probabilità: Esame 5 giugno 2012

Testo e soluzione

Nome:____

1. **(6 pts)** Sette biglietti numerati da 1 a 7 vengono distribuiti in tre scatole A,B,C in modo tale che tutti i 3^7 esiti possibili siano equiprobabili. Calcolare

   (a) la probabilità che i biglietti 1 e 2 siano in A

   (b) la probabilità che i biglietti 1 e 2 siano in A sapendo che in A ci sono tre biglietti

Soluzione: Ogni biglietto ha 3 possibili destinazioni, quindi si hanno 3^7 esiti distinti. Quando il biglietto 1 e il biglietto 2 sono in A, ogni biglietto di numero $3, \ldots, 7$ ha tre possibili destinazioni. Quindi ci sono 3^5 esiti distinti tali che il biglietto 1 e il biglietto 2 sono in A. La probabilità richiesta in (a) dunque vale

$$\frac{3^5}{3^7} = \frac{1}{9}.$$

Alloa stessa conclusione si può giungere osservando che i biglietti 1 e 2 vanno indipendentemente in A ciascuno con probabilità 1/3.

Consideriamo ora il caso in cui A contiene tre biglietti. Ci sono $\binom{7}{3}$ possibili scelte per i tre biglietti da mettere in A. Calcoliamo quante di queste sono tali che 1 e 2 sono in A: se 1 e 2 sono in A, si hanno 5 possibili scelte per l'altro biglietto. Quindi la probabilità richiesta in (b) vale

$$\frac{5}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{7}.$$

Nome:____

2. **(6 pts)** Giacomo gioca a un videogioco. A ogni partita indipendentemente ha probabilità 1/3 di vincere. Gioca quattro partite. Se perde la quarta partita, allora smette di giocare. Se invece vince la quarta partita, allora continua a giocare fino alla prima sconfitta.

   (a) Quante partite gioca in media ?

   (b) Quante partite perde in media ?

Soluzione:

(a). Sia X il numero di partite giocate in totale. Allora $X = 4$ se e solo se la quarta partita è una sconfitta. Dunque, se $p = 1/3$:

$$P(X = 4) = (1 - p).$$

Per $i = 1, 2, \dots$, abbiamo che $X = 4+i$ se e solo se le partite $4, 4+1, \dots, 4+(i-1)$ sono vittorie e la partita $4 + i$ è una sconfitta. Dunque

$$P(X = 4 + i) = p^i(1 - p)\,, \qquad i = 1, 2 \dots.$$

Allora si ha

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = 4(1 - p) + \sum_{i=1}^{\infty}(4 + i)p^i(1 - p) = \sum_{i=0}^{\infty}(4 + i)p^i(1 - p).$$

Sappiamo che

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i(1 - p) = 1\,, \quad \sum_{i=1}^{\infty} ip^{i-1}(1 - p) = \frac{1}{p - 1}.$$

Quindi

$$E[X] = 4\sum_{i=0}^{\infty} p^i(1 - p) + p\sum_{i=1}^{\infty} ip^{i-1}(1 - p) = 4 + \frac{p}{p - 1}.$$

Per $p = 1/3$ si ha $E[X] = 4.5$.
A questa conclusione si poteva arrivare rapidamente osservando che la X vale $3 + Z$, dove Z è una variabile geometrica di parametro $1 - p = 2/3$. Infatti dopo la terza partita Giacomo gioca fino alla prima sconfitta e poi smette di giocare. Quindi $E[Z] = 3/2$ e $E[X] = 3 + 3/2 = 4.5$.

(b). Sia ora Y il numero di partite perse tra le prime tre partite giocate. L'osservazione cruciale è che il numero di partite perse in totale è uguale a $Y + 1$, poiché dopo la terza partita si gioca fino alla prima sconfitta. Allora il numero medio di sconfitte è $1 + E[Y] = 3$, dove usiamo il fatto che Y è binomiale di parametri 3 e 2/3 e quindi $E[Y] = 2$.

Nome:_______________________________________

3. **(6 pts)** Si consideri la passeggiata aleatoria in cui a ogni passo si va a destra con probab. 2/3 e a sinistra con probab. 1/3. Calcolare:

   (a) $\lim_{n\to\infty} P\big(S_n \geqslant \frac{1}{2}\, n\big)$
   (b) $\lim_{n\to\infty} P\big(|S_n - \frac{1}{3}\, n| \leqslant n^{3/4}\big)$
   (c) $\lim_{n\to\infty} P\big(|S_n - \frac{1}{3}\, n| \leqslant n^{1/4}\big)$

Soluzione:
Siano X_i variabili aleatorie i.i.d. con $X_i = -1, 1$ con probabilità $1/3, 2/3$ rispettivamente. In particolare $E[X_i] = 1/3$. Abbiamo $E[S_n] = nE[X_1] = \frac{n}{3}$.
(a) Per la legge dei grandi numeri si ha:

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(|S_n - \frac{n}{3}| \geqslant \epsilon n\Big) = 0$$

per ogni $\epsilon > 0$. Se $S_n \geqslant \frac{1}{2}\, n$, allora sicuramente $|S_n - \frac{n}{3}| \geqslant \epsilon n$, non appena $\epsilon < 1/6$, quindi fissando per es. $\epsilon = 0.1$, abbiamo

$$P\big(S_n \geqslant \frac{1}{2}\, n\big) \leqslant P\Big(|S_n - \frac{n}{3}| \geqslant \epsilon n\Big).$$

Pertanto passando al limite si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\big(S_n \geqslant \frac{1}{2}\, n\big) = 0.$$

(b) La varianza di S_n vale $\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = n8/9$. Per il teorema del limite centrale si ha, per ogni $x > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(|S_n - \frac{n}{3}| \leqslant x\sqrt{n8/9}\Big) = 2\Phi(x) - 1,$$

dove $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz$. Osserviamo che se x è grande, allora con grande probabilità $|S_n - \frac{n}{3}| \leqslant x\sqrt{n8/9}$. In particolare, se n è grande, allora con grande probabilità $|S_n - \frac{n}{3}| \leqslant n^{3/4}$, essendo $n^{3/4}$ molto maggiore di $x\sqrt{n8/9}$ se n è grande. Piú precisamente, per x fissato, $n^{3/4} \geqslant x\sqrt{n8/9}$ per tutti gli n abbastanza grandi e dunque

$$P\big(|S_n - \frac{1}{3}\, n| \leqslant n^{3/4}\big) \geqslant P\Big(|S_n - \frac{n}{3}| \leqslant x\sqrt{n8/9}\Big).$$

Allora, per ogni $x > 0$ fissato,

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|S_n - \frac{1}{3}\, n| \leqslant n^{3/4}\big) \geqslant \lim_{n\to\infty} P\Big(|S_n - \frac{n}{3}| \leqslant x\sqrt{n8/9}\Big) = 2\Phi(x) - 1.$$

Poiché il membro a destra tende a 1 per $x \to \infty$ e il membro a sinistra non dipende da x si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|S_n - \frac{1}{3}\, n| \leqslant n^{3/4}\big) = 1.$$

c) Ragioniamo come sopra. Per $x > 0$ fissato, $n^{1/4} \leqslant x\sqrt{n8/9}$ per tutti gli n abbastanza grandi e dunque si ha

$$P\big(|S_n - \frac{1}{3}\, n| \leqslant n^{1/4}\big) \leqslant P\Big(|S_n - \frac{n}{3}| \leqslant x\sqrt{n8/9}\Big).$$

Allora, per ogni $x > 0$ fissato,

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|S_n - \frac{1}{3}\, n| \leqslant n^{1/4}\big) \leqslant \lim_{n\to\infty} P\Big(|S_n - \frac{n}{3}| \leqslant x\sqrt{n8/9}\Big) = 2\Phi(x) - 1.$$

Poiché il membro a destra tende a 0 per $x \to 0$ e il membro a sinistra non dipende da x si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|S_n - \frac{1}{3}\, n| \leqslant n^{1/4}\big) = 0.$$

Nome:______________________________________

4. **(6 pts)**

   Le variabili aleatorie continue X, Y hanno densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,y & \text{se } \ 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   (a) Calcolare c.

   (b) Dire se X e Y sono indipendenti.

   (c) Calcolare la covarianza tra X e Y

Soluzione:
(a). Abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = c\int_0^1 dx\int_x^1 y\,dy = \frac{c}{2}\int_0^1 (1-x^2)dx = \frac{c}{3}.$$

Allora $c = 3$.

(b). Non sono indipendenti poiché la condizione $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$ non è esprimibile in forma di prodotto e dunque nemmeno $f(x,y)$.

(c). La covarianza vale $E[XY] - E[X]E[Y]$. Abbiamo

$$E[XY] = 3\int_0^1 dx\int_x^1 xy^2\,dy = \int_0^1 x(1-x^3)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

Inoltre

$$E[X] = 3\int_0^1 dx\int_x^1 xy\,dy = \frac{3}{2}\int_0^1 x(1-x^2)dx = \frac{3}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{3}{8},$$

e anche

$$E[Y] = 3\int_0^1 dx\int_x^1 y^2\,dy = \int_0^1 (1-x^3)dx = \frac{3}{4}.$$

In conclusione, $E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{3}{10} - \frac{9}{32} = \frac{3}{160}$

Nome:____

5. **(6 pts)** Due persone si danno appuntamento al bar alle 22. Supponiamo che la persona i arrivi X_i minuti dopo le 22, dove le $X_i, i = 1, 2$ sono variabili aleatorie esponenziali indipendenti di parametro $\lambda = 0.1$. Calcolare quanto tempo in media deve attendere la persona che arriva per prima.

Soluzione: Siano $X = \min\{X_1, X_2\}$ e $Y = \max\{X_1, X_2\}$. L'intervallo di tempo che ci interessa è $Y - X$. Allora il suo valor medio è dato dato

$$E[Y - X] = E[Y] - E[X].$$

Calcoliamo $E[Y] = \int_0^\infty y f_Y(y) dy$. Per scrivere la f_Y osserviamo che per $t > 0$:

$$F_Y(t) = P(Y \leqslant t) = P(X_1 \leqslant t)^2 = (1 - e^{-\lambda t})^2.$$

Allora, derivando e ponendo $t = y$, per $y > 0$ si ha:

$$f_Y(y) = 2\lambda e^{-\lambda y}(1 - e^{-\lambda y}).$$

Per il valore atteso si ottiene

$$E[Y] = \int_0^\infty y 2\lambda e^{-\lambda y}(1 - e^{-\lambda y}) dy = 2\int_0^\infty y\lambda e^{-\lambda y} dy - \int_0^\infty y 2\lambda e^{-2\lambda y} dy = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}.$$

Ora calcoliamo il valor medio di X. Si ha, per $t > 0$:

$$F_X(t) = P(X \leqslant t) = 1 - P(X > t) = 1 - P(X_1 > t)^2 = 1 - e^{-2\lambda t}.$$

Allora per $x > 0$:

$$f_X(x) = 2\lambda e^{-2\lambda x}.$$

Dunque $E[X] = \int_0^\infty x 2\lambda e^{-2\lambda x} dx = \frac{1}{2\lambda}$. In conclusione

$$E[Y] - E[X] = \frac{2}{\lambda} - \frac{2}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ponendo $\lambda = 0.1$ si ha una attesa media di $E[Y] - E[X] = 10$ minuti.

Nome:____

6. **(6 pts)** Una scatola contiene 1000 palline, di cui 2 sono nere e il resto bianche. Effettuiamo 1000 estrazioni con rimpiazzo e contiamo il numero di palline nere estratte. Dire quale dei seguenti risultati è il piú probabile:

   (a) Meno di 2 palline nere

   (b) Esattamente due palline nere

Soluzione: Sia X il numero di palline nere estratte. Allora X è una binomiale di parametri $n = 1000$ e $p = 2/1000$. Sappiamo che X è approssimabile con una variabile di Poisson di parametro $\lambda = 1000 \times (2/1000) = 2$, ossia

$$P(X = k) \approx \frac{2^k}{k!} e^{-2}.$$

Allora l'evento in (a) ha probab. circa $e^{-\lambda}(1 + \lambda) = 3e^{-2}$, e l'evento in (b) ha probab. circa $e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2} = 2e^{-2}$. Concludiamo che l'evento in (a) è piú probabile.

PS. Notiamo che pur non essendo immediato, è possibile raggiungere questa conclusione senza approssimazione, usando le espressioni esatte per la binomiale:

$$P(X < 2) = (1 - p)^{1000} + 1000p(1 - p)^{999}, \qquad P(X = 2) = \binom{1000}{2} p^2(1 - p)^{998}.$$

Infatti, usando $p = 2/1000$ e le ovvie relazioni $999p \leqslant 2$ e $p^2 \geqslant 0$, si ha

$$\frac{P(X < 2)}{P(X = 2)} = \frac{(1 - p)^2 + 2(1 - p)}{999p} \geqslant \frac{3 - 4p}{2} = 1.5 - 0.004 > 1.$$