Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2011-12, II semestre
4 luglio, 2012

CP110 Probabilità: Esame 4 luglio 2012

Testo e soluzione

Nome:____

1. **(6 pts)** Una scatola contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Ne vengono estratte due a caso, senza rimpiazzo. Sia X il massimo tra i due numeri estratti. Calcolare
   (a) la densità di probabilità di X
   (b) il valore atteso di X.

Soluzione:
(a). Ci sono $\binom{10}{2}$ esiti possibili per la scelta di due palline tra dieci. Se $X = i$, allora la pallina i viene estratta insieme a una delle palline numerate da 1 a $i - 1$. Quindi l'evento $X = i$, per $i = 1, \dots, 10$ corrisponde a $i - 1$ dei $\binom{10}{2} = 45$ esiti possibili. Allora la densità di probabilità di X è data da

$$P(X = i) = \frac{i-1}{\binom{10}{2}}, \qquad i = 1, \dots, 10.$$

(b). Il valore atteso di X quindi vale

$$E[X] = \sum_{i=1}^{10} iP(X = i) = \frac{1}{45} \sum_{i=1}^{10} i(i-1) = \frac{330}{45} = \frac{22}{3}.$$

Nome:____

2. **(6 pts)** Due squadre giocano una serie di partite. Ad ogni partita indipendentemente, la squadra A vince con probabilità $1/3$ e la squadra B vince con probabilità $2/3$. La coppa viene assegnata alla squadra che per prima totalizza tre vittorie. Sapendo che A vince la coppa, calcolare il valore atteso del numero di partite giocate.

Soluzione:
(a). Sia E l'evento "A vincè'. Sia E_j, $j = 3, 4, 5$ l'evento "A vince e si giocano j partite in totalè'. L'unico modo di vincere in quattro partite è di vincere la quarta e perderne una tra le prime tre, e l'unico modo di vincere in cinque partite è di vincere la quinta e perderne due tra le prime quattro. Allora

$$P(E_3) = (1/3)^3\,, \quad P(E_4) = \binom{3}{1}(2/3)(1/3)^3\,, \quad P(E_5) = \binom{4}{2}(2/3)^2(1/3)^3\,.$$

Pertanto

$$P(E) = P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) = (1/3)^3[1 + 2 + 8/3].$$

Sia X il numero di partite giocate in totale. Abbiamo

$$P(X = j|E) = \frac{P(E \cap \{X = j\})}{P(E)} = \frac{P(E_j)}{P(E)} = \frac{1}{1 + 2 + 8/3} \times \begin{cases} 1 & j = 3 \\ 2 & j = 4 \\ 8/3 & j = 5 \end{cases}$$

Quindi il valore atteso richiesto vale

$$\sum_{j=3}^{5} jP(X = j|E) = \frac{3 + 4 \times 2 + 5 \times (8/3)}{1 + 2 + 8/3} \approx 4.29$$

Allo stesso modo si può verificare che il valor medio delle partite giocate sapendo che B vince vale circa 3.87.

Nome:____

3. **(6 pts)** Sia X una variabile aleatoria con distribuzione gamma di parametri $\alpha = n$ e $\lambda = 1$. Fornire un valore approssimato, per n grandi, per le seguenti probabilità

   (a) $P(X \geqslant 2n)$

   (b) $P(X \geqslant n + \sqrt{n})$

   (c) $P(X \geqslant n + 1)$

Soluzione:
(a). Sappiamo che X è una somma di n esponenziali indipendenti di parametro $\lambda = 1$:

$$X = \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

Quindi $X \geqslant 2n$ equivale a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(T_i - 1) \geqslant 1$, dove le $T_i - 1$ sono variabili indipendenti con media 0 e varianza 1. Allora per la legge dei grandi numeri si ha

$$P(X \geqslant 2n) = P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(T_i - 1) \geqslant 1\right) \to 0\,, \qquad n \to \infty$$

(b). Come sopra scriviamo $X - n = \sum_{i=1}^{n}(T_i - 1)$. Per il teorema del limite centrale si ha che la variabile standardizzata

$$Z_n = \frac{X - n}{\sqrt{n}}$$

è approssimativamente normale standard. Allora

$$P(X \geqslant n + \sqrt{n}) = P(Z_n \geqslant 1) \approx 1 - \Phi(1),$$

che vale circa 0.16
(c). Ragionando come sopra abbiamo

$$P(X \geqslant n + 1) = P(Z_n \geqslant 1/\sqrt{n}) \approx 1 - \Phi(1/\sqrt{n}) \to 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Nome:______________________________________

4. **(6 pts)** Due bambini lanciano un dado ciascuno. Vince chi ottiene il massimo numero. In caso di pareggio lanciano di nuovo un dado ciascuno, e cosí via fino ad ottenere due numeri diversi. Calcolare

   (a) il numero medio dei lanci effettuati

   (b) la probabilità che il gioco richieda almeno 4 lanci sapendo che nei primi 2 lanci si ha pareggio.

Soluzione:
(a). Sia p la probabilità di pareggio dopo un lancio. Allora, se X_1, X_2 indicano i due dadi indipendenti

$$p = P(X_1 = X_2) = \sum_{i=1}^{6} P(X_1 = X_2 = i) = \sum_{i=1}^{6} P(X_1 = i)P(X_2 = i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6^2} = \frac{1}{6}.$$

Sia T il numero di lanci effettuati. L'evento $T = k$ equivale all'evento "pareggio nei primi $k-1$ lanci e non-pareggio nel k-esimo lancio". Quindi

$$P(T = k) = p^{k-1}(1-p)\,, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Allora T è una geometrica di parametro $1-p$, quindi il numero medio vale

$$E[T] = 1/(1-p) = 6/5.$$

(b). L'evento $T \geqslant k$ equivale all'evento "pareggio nei primi $k-1$ lanci", e per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$P(T \geqslant k) = p^{k-1}$$

Allora la probabilità richiesta vale

$$P(T \geqslant 4 \,|\, T \geqslant 3) = \frac{P(T \geqslant 4)}{P(T \geqslant 3)} = p = \frac{1}{6}.$$

Nome:____

5. **(6 pts)** Siano X, Y, Z tre variabili normali standard indipendenti. Calcolare

   (a) $P(X + Y + Z \geqslant 0)$
   (b) $\mathrm{Cov}(X + 2Y, 2Y + 3Z)$
   (c) $E[X^2 Y(Z + 1)]$
   (d) $E[X^2 Y^2 (Z + 1)]$

Soluzione:

(a). $X + Y + Z$ è normale con media 0 e varianza 3. Quindi $P(X + Y + Z \geqslant 0) = 1/2$.

(b). Per l'indipendenza si ha

$$\mathrm{Cov}(X + 2Y, 2Y + 3Z) = \mathrm{Cov}(2Y, 2Y) = 4\mathrm{Var}(Y) = 4.$$

(c). $E[X^2 Y(Z + 1)] = E[X^2]E[Y]E[Z + 1] = 0$ poiché $E[Y] = 0$.

(d). $E[X^2 Y^2 (Z + 1)] = E[X^2]E[Y^2]E[Z + 1] = 1$ poiché $E[X^2] = E[Y^2] = E[Z + 1] = 1$.

Nome:____

6. **(6 pts)** Le variabili aleatorie continue X, Y hanno densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xe^{-y} & x \in [0,1],\ y \in [0,\infty) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Dire se X e Y sono indipendenti.

(b) Calcolare la varianza di $X+Y$.

Soluzione:
(a). Le variabili sono indipendenti, infatti possiamo scrivere $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ dove

$$f_X(x) = 2x\, 1_{x\in[0,1]}\,, \qquad f_Y(y) = e^{-y}\, 1_{y\in[0,\infty)}$$

In particolare, Y è una variabile esponenziale di parametro 1.

(b). Per l'indipendenza si ha

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

Osserviamo che

$$\mathrm{Var}(X) = \int x^2 f_X(x)dx - \left(\int x f_X(x)dx\right)^2 = \int_0^1 2x^3 dx - \left(\int_0^1 2x^2 dx\right)^2 = 1/18$$

Inoltre sappiamo che $\mathrm{Var}(Y) = 1$, essendo Y esponenziale di parametro 1. Allora

$$\mathrm{Var}(X+Y) = 1 + 1/18 = 19/18.$$