Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2011-12, II semestre
4 febbraio, 2013

CP110 Probabilità: esame del 4 febbraio 2013

Testo e soluzione

Nome:______________________________________

1. **(6 pts)** In un triangolo rettangolo i cateti X e Y sono variabili aleatorie uniformi in $[0,1]$ indipendenti. Calcolare:

   (a) il valore atteso dell'area del triangolo

   (b) il valore atteso del quadrato dell'ipotenusa

Soluzione: Sia $A = \frac{1}{2}XY$ l'area del triangolo. Per l'indipendenza di X, Y:

$$E[A] = \frac{1}{2}E[XY] = \frac{1}{2}E[X]E[Y] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Sia $Z^2 = X^2 + Y^2$ il quadrato dell'ipotenusa. Allora

$$E[Z^2] = E[X^2] + E[Y^2] = 2E[X^2] = \frac{2}{3}.$$

Nome:______________________________________

2. **(6 pts)** L'andamento del prezzo della benzina viene descritto da una passeggiata aleatoria tale che ogni settimana il prezzo aumenta di 5 centesimi con probabilità 1/3, diminuisce di 2 centesimi con probabilità 1/3 e rimane costante con probabilità 1/3. Se il prezzo iniziale è di 1 euro e cinquanta centesimi, sia S il prezzo dopo 50 settimane.

   (a) Calcolare il valore atteso di S.

   (b) Trovare un valore di x tale che la probabilità dell'evento $S \geqslant x$ sia all'incirca 0.5.

Soluzione: Osserviamo che la variabile S (in centesimi) puo' essere scritta come $S = 150+K$, se definiamo $K = \sum_{i=1}^{50} X_i$, dove X_i sono v.a. v.a. indipendenti con distribuzione $P(X_i = 5) = 1/3$, $P(X_i = -2) = 1/3$, $P(X_i = 0) = 1/3$. Usando il fatto che $E[X_i] = 1$, allora si ha

$$E[S] = 150 + E[K] = 150 + 50 \times E[X_1] = 150 + 50 = 200.$$

Per il teorema del limite centrale sappiamo che

$$W = \frac{K - E[K]}{\sqrt{\mathrm{Var}[K]}} = \frac{S - 200}{\sqrt{\mathrm{Var}[K]}},$$

approssima una v.a. normale standard. In particolare, $P(W \geqslant 0) \approx 1/2$. Per avere $P(S \geqslant x) \approx 1/2$ si deve pertanto porre $x = 200$, cosí che $P(S \geqslant x) = P(W \geqslant 0) \approx 1/2$.

Nome:______________________________________

3. **(6 pts)** Lo skilift di un impianto sciistico inizia la sua attività alle ore 9:00. Supponiamo che il tempo (misurato in minuti) di arrivo del primo sciatore e gli intervalli di tempo tra gli arrivi degli sciatori siano tutte variabili aleatorie indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 0.2$. Calcolare:

   (a) la probabilità che non arrivi nessuno sciatore prima delle 9:10;

   (b) la media e la varianza del numero di sciatori che arrivano tra le 9:00 e le 10:00.

Soluzione: Si tratta di un processo di Poisson di parametro $\lambda = 0.2$. Dunque sappiamo che il numero di arrivi tra le 9:00 e le 9:10 è una variabile di Poisson di parametro $10 \times \lambda = 2$. Quindi la prob. richiesta in (a) è e^{-2}. Il numero di arrivi tra le 9:00 e le 10:00 è una variabile di Poisson di parametro $60 \times \lambda = 12$. Quindi la media e la varianza richieste in (b) sono entrambi pari a 12.

Nome:____

4. **(6 pts)** Tre dadi vengono lanciati. Calcolare il valore atteso del massimo fra le tre facce.

Soluzione: Sia X il massimo delle tre facce. Allora per l'indipendenza si ha

$$P(X \leqslant k) = \left(\frac{k}{6}\right)^3, \quad k = 1, \ldots, 6.$$

Dunque

$$P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = \left(\frac{k}{6}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^3, \quad k = 1, \ldots, 6.$$

Semplificando si ha

$$P(X = k) = \frac{3k(k-1)+1}{6^3}, \quad k = 1, \ldots, 6.$$

Passando al valore atteso, calcolando esplicitamente si ottiene

$$E[X] = \sum_{k=1}^{6} k \frac{3k(k-1)+1}{6^3} = \frac{357}{72} \approx 4.96$$

Nome:______________________________________

5. **(5 pts)** Una casa farmaceutica mette a punto due analisi differenti per determinare se un individuo è affetto dal virus K. Il test T_1 è positivo nel 90% dei casi in cui l'individuo è malato, mentre è positivo nel 5% dei casi in cui l'individuo è sano. Il test T_2 è positivo nel 80% dei casi in cui l'individuo è malato, mentre è positivo nel 4% dei casi in cui l'individuo è sano. Quale dei due test minimizza la probabilità di essere sano sapendo che il test è positivo ?

Soluzione: Sia A_i l'evento che il test T_i è positivo, per $i = 1, 2$, e sia S l'evento che l'individuo scelto a caso sia sano. Vogliamo confrontare $P(S|A_1)$ e $P(S|A_2)$. Si ha

$$P(S|A_i) = P(A_i|S)\frac{P(S)}{P(A_i)} = \frac{P(S)P(A_i|S)}{P(S)P(A_i|S) + P(S^c)P(A_i|S^c)}.$$

Dunque

$$P(S|A_i) = \frac{1}{1 + x_i}$$

dove $x_i = \frac{P(S^c)P(A_i|S^c)}{P(S)P(A_i|S)}$. Allora il test che minimizza $P(S|A_i)$ è il test per cui è massimo il rapporto

$$\frac{P(A_i|S^c)}{P(A_i|S)}.$$

Nel primo caso si ha $\frac{P(A_i|S^c)}{P(A_i|S)} = 0.9/0.05 = 18$, mentre nel secondo si ha $\frac{P(A_i|S^c)}{P(A_i|S)} = 0.8/0.04 = 20$. Dunque il test T_2 minimizza la probabilità richiesta. Notiamo che per rispondere non è necessario conoscere il valore di $P(S)$, ossia la densità di individui sani.

Nome:______________________________________

6. **(6 pts)** Le variabili aleatorie continue X, Y hanno densita' congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,(x-1)(y-1) & \text{se } 2 \geqslant y \geqslant x \geqslant 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove c è un'opportuna costante.

(a) Dire se X e Y sono indipendenti.

(b) Calcolare il valore atteso di $Y - X$

Soluzione: X e Y non sono indipendenti poiché la condizione $2 \geqslant y \geqslant x \geqslant 1$ non descrive un rettangolo nel piano.
Per il valore atteso in (b), cominciamo con il determinare la costante c. Abbiamo

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = c\int_1^2 (x-1)dx \int_x^2 (y-1)dy =$$
$$= c\int_1^2 (x-1)\left(x - \frac{x^2}{2}\right)dx = c\int_1^2 \left(\frac{3}{2}x^2 - x - \frac{x^3}{2}\right) = c\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2} - \frac{15}{8}\right) = \frac{c}{8}$$

Allora $c = 8$.
La marginale di X:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = 8(x-1)\int_x^2 (y-1)dy = \left(-4x^3 + 12x^2 - 8x\right), \qquad 1 \leqslant x \leqslant 2.$$

La marginale di Y:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = 8(y-1)\int_1^y (x-1)dx = \left(4y^3 - 12y^2 + 12y - 4\right), \qquad 1 \leqslant y \leqslant 2.$$

Il valore atteso di X:

$$E[X] = \int_1^2 x\left(-4x^3 + 12x^2 - 8x\right)dx = \frac{23}{15}.$$

Il valore atteso di Y:

$$E[Y] = \int_1^2 y\left(4y^3 - 12y^2 + 12y - 4\right)dy = \frac{9}{5}$$

Allora

$$E[Y - X] = E[Y] - E[X] = \frac{4}{15}.$$