Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2011-12, II semestre
10 aprile, 2012

CP110 Probabilità: Esonero 1

Testo e soluzione

Nome:____

1. **(8 punti)** Un'urna contiene 3 palline bianche, 3 palline rosse e 6 palline verdi. Tre palline vengono estratte a caso senza rimpiazzo. Calcolare

   (a) La probabilità di ottenere tre palline di colore diverso

   (b) La probabilità di ottenere 3 palline dello stesso colore.

   (c) La probabilità condizionata di ottenere 3 palline verdi sapendo che sono tutte dello stesso colore.

Soluzione: (a). una pallina per ogni colore:

$$P(\text{colori differenti}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}\binom{6}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{27}{110}$$

(b). 3 palline verdi, 3 palline bianche o 3 palline rosse:

$$P(\text{stesso colore}) = \frac{\binom{3}{3} + \binom{3}{3} + \binom{6}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{10}$$

(c).

$$P(3 \text{ verdi} \,|\, \text{stesso colore}) = \frac{P(3 \text{ verdi})}{P(\text{stesso colore})} = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{3}{3} + \binom{3}{3} + \binom{6}{3}} = \frac{10}{11}$$

Nome:____

2. **(8 punti)** Dobbiamo parcheggiare l'auto per 100 giorni in un parcheggio automatico che costa 1 euro al giorno. Se un giorno non paghiamo il biglietto abbiamo probabilita' 0.05 di ricevere una multa di 25 euro. Confrontando i valori attesi corrispondenti si dica quale delle tre strategie seguenti dovremmo preferire:

   (a) paghiamo sempre il biglietto

   (b) non paghiamo mai il biglietto

   (c) ogni giorno decidiamo se pagare il biglietto oppure no tirando una moneta

Soluzione: Sia Y la spesa totale dopo cento giorni. Per la strategia (a) abbiamo $Y = 100$. Vogliamo calcolare $E[Y]$ nelle strategie (b) e (c).

(b). Chiamiamo X il numero di multe ricevute in cento giorni. X e' una binomiale di parametri $n = 100$ e $p = 0.05$ e $E[X] = np = 5$. Inoltre, $Y = 25 * X$, e quindi $E[Y] = 25E[X] = 125$.

(c). Sia X il numero di multe ricevute in cento giorni e sia Z il numero di giorni in cui non paghiamo il biglietto. In questo modo si ha

$$E[Y] = (100 - Z) + 25 * X.$$

Notiamo che Z e' una binomiale di parametri $n = 100$ e $1/2$ e condizionatamente a $Z = k$, si ha che X e' una binomiale di parametri k e $p = 0.05$. In particolare, per ogni $k = 0, \dots, n$

$$\sum_{x=0}^{n} xP(X = x|Z = k) = kp$$

Allora

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=0}^{n} xP(X = x) = \sum_{x=0}^{n} x \sum_{k=0}^{n} P(X = x|Z = k)P(Z = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(Z = k) \sum_{x=0}^{n} xP(X = x|Z = k) = \sum_{k=0}^{n} P(Z = k)kp = np/2 = 5/2. \end{aligned}$$

In conclusione, $E[Y] = E[100 - Z] + 25E[X] = 50 + 25 * (5/2) = 112.5$.

Nome:____

3. **(8 punti)** Lanciamo un dado n volte. Ad ogni lancio, se esce un numero pari facciamo 2 passi avanti, se esce un numero dispari facciamo 1 passo indietro. Sia X_n la nostra posizione rispetto al punto di partenza dopo n lanci.

   (a) Calcolare il valore atteso e la varianza di X_n.

   (b) La probabilità condizionata che il primo lancio sia dispari sapendo che $X_3 = 3$

Soluzione: (a). Sia Z il numero di volte in cui il dado e' pari. Allora

$$X_n = 2Z - (n - Z) = 3Z - n.$$

Quindi

$$E[X_n] = 3E[Z] - n = n/2\,, \quad Var[X_n] = 9Var[Z] = 9n/4,$$

dove usiamo il fatto che Z e' binomiale di parametri n e $1/2$ e quindi $E[Z] = n/2$ e $Var[Z] = n/4$.

(b). L'evento $E = \{X_3 = 3\}$ significa che si e' avuto 2 volte pari e una volta dispari (non ci sono altri modi di raggiungere la posizione $X_3 = 3$ dopo tre lanci. Questo evento si puo' realizzare in tre modi differenti: $E_1 =$ (dispari,pari,pari), $E_2 =$ (pari,dispari,pari), $E_3 =$ (pari,pari,dispari). Inoltre $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = (1/2)^3$. Quindi la probab. cercata e' data da

$$\frac{P(E_1)}{P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)} = \frac{1}{3}.$$

Nome:____________________________________

4. **(8 punti)** A ogni unità di tempo indipendentemente Alice lancia un dado e Bob tira una moneta. Sia T_A il tempo in cui Alice ottiene 6 per la prima volta e sia T_B il tempo in cui Bob ottiene testa per la seconda volta. Trovare:

   (a) i valori attesi $E[T_A]$ e $E[T_B]$;

   (b) $P(T_A = T_B)$

Soluzione: T_A e' una variabile geometrica di parametro $p_A = 1/6$ e quindi $E[T_A] = 1/p_A = 6$. Per avere $T_B = k$ si deve avere una testa (e $k-2$ croci) nelle prime $k-1$ prove e testa alla k-esima prova. Ci sono $k-1$ possibili scelte per il tempo della prima testa quindi la densita' di probabilita' di T_B e' data da

$$P(T_B = k) = (k-1)(1-p_B)^{k-2}p_B^2, \quad k = 2, 3, \ldots$$

dove p_B e' la probab. di testa, $p_B = 1/2$. Allora

$$\begin{aligned}
E[T_B] &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p_B)^{k-2}p_B^2 = p_B^2 \frac{d^2}{dq^2}\sum_{k=2}^{\infty} q^k \qquad (q = 1-p_B) \\
&= p_B^2 \frac{d^2}{dq^2}\big((1-q)^{-1} - 1 - q\big) \qquad (q = 1-p_B) \\
&= p_B^2 2(1-q)^{-3} \qquad (q = 1-p_B) \\
&= 2/p_B = 4
\end{aligned}$$

(b). Poiche' $\{T_A = T_B\} = \cup_{k=2}^{\infty}\{T_A = T_B = k\}$ si ha

$$\begin{aligned}
P(T_A = T_B) &= \sum_{k=2}^{\infty} P(T_A = T_B = k) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} P(T_A = k)P(T_B = k) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)(1-p_B)^{k-2}p_B^2(1-p_A)^{k-1}p_A \\
&= p_A p_B^2 \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p_B)^{k-1}(1-p_A)^k \\
&= p_A p_B^2 (1-p_A)\frac{d}{dq}[(1-q)^{-1}] \qquad (q = (1-p_B)(1-p_A)) \\
&= p_A p_B^2 (1-p_A)(p_A + p_B - p_A p_B)^{-2} \\
&= 5/49.
\end{aligned}$$

Nome:____

5. **(6 punti)** Un quadrato di lato m viene diviso in m^2 quadratini di lato 1. Supponiamo che ognuno sia colorato di rosso indipendentemente dagli altri con probabilita' $p = \frac{1}{m^2}$. Calcolare la probablità che l'area della regione colorata di rosso sia maggiore di 1, nel limite $m \to \infty$.

Soluzione: l'area $\mathcal{A}$ della regione rossa e' il numero di quadratini rossi, ossia una variabile binomiale di parametri $n = m^2$ e $p = 1/m^2$. Quando $m \to \infty$, sappiamo che $\mathcal{A}$ e' approssimata da una v.a. di Poisson di parametro $\lambda = np = 1$. Quindi

$$\lim_{m\to\infty} P(\mathcal{A} = k) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

In conclusione

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} P(\mathcal{A} > 1) &= 1 - \lim_{m\to\infty}[P(\mathcal{A} = 0) + P(\mathcal{A} = 1)] \\ &= 1 - 2e^{-1}.\end{aligned}$$

Nome:____