Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2011-12, II semestre
29 maggio, 2012

CP110 Probabilità: Esonero 2

Testo e soluzione

Nome:____

1. **(8 punti)** La freccia lanciata da un arco è distribuita uniformemente su un disco di raggio 1 metro. Il disco è diviso in tre parti A, B, C, dove A è l'insieme dei punti che distano dal centro meno di 30 cm, B è l'insieme dei punti che distano dal centro almeno 30 cm ma meno di 60 cm, e C è la parte rimanente. Se la freccia termina in A si hanno 10 punti, se termina in B si hanno 5 punti, e zero punti altrimenti. Si considerino 100 lanci indipendenti della freccia, e sia X il numero di punti realizzati in totale.

   (a) Calcolare il valor medio di X.

   (b) Trovare $m \in \mathbb{N}$ tale che $P(X \geqslant m)$ vale circa 1/2.

Soluzione: Consideriamo un lancio della freccia. Sia D la distanza dal centro, in centimetri, e sia Y il punteggio realizzato. Allora $Y = 10 \times 1_{D<30} + 5 \times 1_{30 \leqslant D<60}$. Si ha

$$E[Y] = 10\, P(D < 30) + 5\, P(30 \leqslant D < 60).$$

Ma, essendo la freccia uniforme,

$$P(D < 30) = \frac{\text{Area}(A)}{\text{Area}(A) + \text{Area}(B) + \text{Area}(C)} = \frac{\pi(30)^2}{\pi(100)^2} = \frac{9}{100}.$$

Allo stesso modo

$$P(30 \leqslant D < 60) = \frac{\text{Area}(B)}{\text{Area}(A) + \text{Area}(B) + \text{Area}(C)} = \frac{\pi[(60)^2 - (30)^2]}{\pi(100)^2} = \frac{27}{100}.$$

Allora, $E[Y] = \frac{9}{10} + \frac{27}{20} = \frac{9}{4}$. Se Y_i rappresenta il punteggio realizzato nell'i-esimo lancio, abbiamo $X = \sum_{i=1}^{100} Y_i$. Ne segue che

$$E[X] = \sum_{i=1}^{100} E[Y_i] = 100E[Y] = 225.$$

Le variabili Y_i sono indipendenti e identicamente distribuite, pertanto il teorema del limite centrale permette di dedurre che

$$\tilde{Z} = \frac{X - 225}{\sqrt{100\text{Var}(Y_1)}}\,,$$

è approssimativamente una normale standard $Z = N(0, 1)$. Quindi per $m = 225$ si ha

$$P(X \geqslant m) = P(\tilde{Z} \geqslant 0) \approx P(Z \geqslant 0) = \frac{1}{2}.$$

Nome:____

2. **(8 punti)** Siano X, Y due variabili indipendenti con distribuzione esponenziale di parametri $\lambda_X = 1$ e $\lambda_Y = 2$ rispettivamente.

   (a) Scrivere la densità di probabilità congiunta di X, Y.

   (b) Scrivere la densità di probabilità della variabile $Z = \frac{1}{2}X + Y$

   (c) Calcolare la varianza di Z.

Soluzione: Abbiamo $f_X(x) = e^{-x}1_{[0,\infty)}$, $f_Y(y) = 2e^{-2y}1_{[0,\infty)}$. Per l'indipendenza,

$$f_{X,Y}(x, y) = 2e^{-x}e^{-2y}1_{[0,\infty)\times[0,\infty)}.$$

Osserviamo che $\frac{1}{2}X$ è esponenziale di parametro 2. Quindi Z è una somma di due esponenziali indipendenti di parametro $\lambda = 2$. Allora Z è una variabile gamma di parametri $\alpha = 2$ e $\lambda = 2$, $Z = \Gamma(2, 2)$, con densità

$$f_Z(z) = \frac{2^2 ze^{-2z}}{\Gamma(2)}\,1_{[0,\infty)} = 4ze^{-2z}1_{[0,\infty)}.$$

La varianza di Z vale

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(\frac{1}{2}X) + \mathrm{Var}(Y) = 2\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{2},$$

dove abbiamo usato il fatto che la variabile esponenziale di parametro λ ha varianza $1/\lambda^2$.

Nome:______________________________________

3. **(6 punti)** Due ciclisti A, B fanno una corsa. In un tempo $t > 0$, A percorre $X(t)$ metri e B percorre $Y(t)$ metri. Supponiamo che $X(t), Y(t)$ siano variabili normali indipendenti con media $\mu = t$ e varianza $\sigma^2 = t$. Calcolare in funzione di t il valore atteso della distanza $|X(t) - Y(t)|$ tra i due corridori.

Soluzione: Se standardizziamo le distanze, abbiamo $X(t) = t + \sqrt{t} Z_A$, e $Y(t) = t + \sqrt{t} Z_B$, dove Z_A, Z_B sono due normali standard indipendenti. Notiamo che $Z_A - Z_B$ è una normale di media 0 e varianza 2. Allora $X(t) - Y(t) = \sqrt{t}(Z_A - Z_B)$ è una normale di media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 2t$. Quindi

$$E[|X(t) - Y(t)|] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|z| e^{-\frac{z^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \, dz \,.$$

Questo integrale si può calcolare come segue:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|z| e^{-\frac{z^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \, dz &= 2 \int_0^{\infty} \frac{z e^{-\frac{z^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \, dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \frac{d}{dz} [-2t e^{-\frac{z^2}{4t}}] \, dz = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Nome:____

4. **(8 punti)** Siano $X_1, \dots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti tali che $X_i = -1, 0, 1$ con probabilità $\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}$ rispettivamente, e sia $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Fornire un'espressione per i seguenti limiti

   (a) $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n} S_n > 0.1\right)$

   (b) $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n > 0.1\right)$

Soluzione: Osserviamo che $E[X_i] = 0$, quindi per la legge (debole) dei grandi numeri si ha

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\frac{1}{n} S_n| > \epsilon\right) = 0$$

per ogni $\epsilon > 0$. Prendendo $\epsilon = 0.1$ e osservando che

$$P\left(\frac{1}{n} S_n > 0.1\right) \leqslant P\left(|\frac{1}{n} S_n| > 0.1\right),$$

si ha che

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n} S_n > 0.1\right) = 0.$$

Per il teorema del limite centrale, $Z_n = \frac{S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}$ è approssimativamente normale standard. Inoltre

$$\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = nE[X_1^2] = n\frac{1}{4}.$$

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n > 0.1\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} > 0.2\right) = 1 - \Phi(0.2),$$

dove $\Phi(a) = \int_{-\infty}^a \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dz$.

Nome:________________________________

5. **(8 punti)** Dieci persone arrivano all'ufficio postale indipendentemente a un orario uniformemente distribuito tra le 8 e le 9 del mattino. Sia X il numero di persone che arrivano tra le 8:00 e le 8:15, e sia Y il numero di persone che arrivano tra le 8:45 e le 9:00.

   (a) Calcolare la covarianza $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

   (b) Scrivere la densità di probabilità congiunta di X, Y.

Soluzione: Sia U la variabile uniforme tra 0 e 60 (in minuti), di modo che se U_i sono copie indipendenti di U si puo' usare la rappresentazione

$$X = \sum_{i=1}^{10} 1_{0 \leqslant U_i \leqslant 15}\,, \qquad Y = \sum_{i=1}^{10} 1_{45 \leqslant U_i \leqslant 60}$$

Poniamo $X_i = 1_{0 \leqslant U_i \leqslant 15}$ e $Y_i = 1_{45 \leqslant U_i \leqslant 60}$, $X = \sum_i X_i$ e $Y = \sum_i Y_i$. Allora

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{10} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j) = \sum_{i=1}^{10} \mathrm{Cov}(X_i, Y_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j).$$

Se $i \neq j$ si ha che X_i è indipendente da Y_j, e quindi $\mathrm{Cov}(X_i, Y_j) = 0$. Se $i = j$ abbiamo

$$\mathrm{Cov}(X_i, Y_i) = E[X_i Y_i] - E[X_i]E[Y_i] = -E[X_i]E[Y_i] = -E[X_1]^2 = -P(0 \leqslant U \leqslant 15)^2 = -\frac{1}{16},$$

dove usiamo il fatto che $X_i Y_i = 0$. In conclusione si ha $\mathrm{Cov}(X, Y) = -\frac{10}{16}$.

Per la densità congiunta, calcoliamo

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

per $x, y \in \{0, \dots, 10\}$. Osserviamo che $p(x, y) = 0$ se $x + y > 10$. Se $x + y \leqslant 10$ allora dobbiamo prendere x elementi tra 10, e poi y elementi tra $10 - x$, e richiedere che $0 \leqslant U_i \leqslant 15$, per gli x elementi, $45 \leqslant U_i \leqslant 60$, per gli y elementi, e $15 \leqslant U_i \leqslant 45$ per i rimanenti $10 - x - y$ elementi. Quindi, se $x + y \leqslant 10$:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \binom{10}{x}\binom{10-x}{y} P(0 \leqslant U \leqslant 15)^x P(45 \leqslant U \leqslant 60)^y P(15 \leqslant U \leqslant 45)^{10-x-y} \\ &= \binom{10}{x}\binom{10-x}{y} \left(\frac{1}{4}\right)^{x+y} \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x-y} \\ &= \frac{10!}{x!y!(10-x-y)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{x+y} \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x-y}. \end{aligned}$$

Riconosciamo la densità di probabilità associata a una distribuzione multinomiale di parametri $n = 10, p_1 = p_2 = 1/4$, e $p_3 = 1/2$.