Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2012-13, II semestre
4 giugno, 2013

CP110 Probabilità: Esame 4 giugno 2013

Testo e soluzione

Nome:____

1. **(6 pts)** Un'urna contiene inizialmente 1 pallina rossa e 0 palline blu. A ogni passo, una pallina viene estratta a caso. Se è rossa viene rimessa dentro l'urna insieme a altre 2 palline, una rossa e una blu; se è blu viene rimessa dentro insieme a altre 2 palline, entrambi blu. Sia B_k il numero di palline blu dopo k passi.

   (a) Calcolare il valore atteso di B_2

   (b) Calcolare la probabilità che $B_3 = 3$

Soluzione: Il numero di palline blu aumenta sempre di una unità oppure di due unità. Abbiamo $B_1 = 1$ con probabilità 1, e $B_2 = 2$ se viene estratta una pallina rossa al secondo passo, e $B_2 = 3$ se viene estratta una pallina blu al secondo passo. Prima della seconda estrazione si hanno 2 palline rosse e una blu quindi

$$P(B_2 = 2) = \frac{2}{3}, \qquad P(B_2 = 3) = \frac{1}{3}.$$

Allora $E[B_2] = 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

Notiamo che per avere $B_3 = 3$ è necessario estrarre 3 volte una pallina rossa. Al primo passo l'estrazione di una pallina rossa ha probabilità 1, al secondo passo ha probabilità 2/3. Sapendo che la seconda estrazione è rossa, prima della terza estrazione abbiamo 3 palline rosse e 2 blu, quindi l'estrazione di una pallina rossa ha probabilità 3/5. Allora

$$P(B_3 = 3) = 1 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

*** Osserviamo che allo stesso modo si può calcolare, per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$P(B_k = k) = \prod_{j=1}^{k} \frac{j}{2j-1}.$$

Nome:______________________________________

2. **(6 pts)** Un mazzo di carte francesi viene mischiato e successivamente diviso in 4 mazzi di 13 carte ciascuno. Calcolare:

   (a) la probabilità che ogni mazzo contenga un asso;

   (b) la probabilità che ci siano esattamente due mazzi senza assi

Soluzione: Consideriamo tutti i modi Ω di dividere le carte in 4 mazzi uguali, senza tener conto dell'ordine delle carte in ciascun mazzo, ma tenendo conto dell'ordine dei mazzi. Ci sono

$$\#\Omega = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13} = \binom{52}{13,13,13,13} = \frac{52!}{(13!)^4}$$

possibilità. Se ogni mazzo deve contenere un asso, possiamo mettere da parte gli assi e formare 4 mazzi di 12 carte ciascuno ($48!/(12!)^4$ modi), e poi distribuire gli assi, uno in ogni mazzo ($4!$ modi). Ci sono pertanto

$$\#A = \frac{48!}{(12!)^4} \times 4!$$

possibilità. Quindi la probabilità richiesta in (a) vale

$$\frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4! \times (13)^4}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \approx 0.1$$

Per il calcolo di (b), supponiamo per un momento che i due mazzi senza assi siano il mazzo 1 e il mazzo 2. Ci sono tre casi possibili: 1) il mazzo 3 ha 3 assi e il mazzo 4 ha 1 asso; 2) il mazzo 3 ha 2 assi e il mazzo 4 ha 2 assi; 3) il mazzo 3 ha 1 asso e il mazzo 4 ha 3 assi. Nel caso 1) scegliamo 13 carte tra le 48 che non contengono assi per il primo mazzo, 13 carte tra le restanti 35 che non contengono assi per il secondo mazzo, 10 tra le restanti 22 che non contengono assi per il terzo mazzo e 12 tra le restanti 12 che non contengono assi per il quarto mazzo. Inoltre scegliamo 3 assi da assegnare al terzo mazzo e 1 asso da assegnare al quarto mazzo. Quindi nel caso 1) si hanno

$$\#B_1 = \binom{48}{13}\binom{35}{13}\binom{22}{10}\binom{12}{12}\binom{4}{3} = \frac{4 \times 48!}{(13!)^2 10! 12!}$$

possibilità. Con lo stesso ragionamento, nel caso 2) si hanno

$$\#B_2 = \binom{48}{13}\binom{35}{13}\binom{22}{11}\binom{11}{11}\binom{4}{2} = \frac{6 \times 48!}{(13!)^2 (11!)^2}$$

possibilità. Per simmetria nel caso 3) si hanno $\#B_3 = \#B_1$ possibilità. Se i mazzi senza assi fossero stati il primo e il terzo o un qualunque altro paio, avremmo ottenuto gli stessi numeri. Poiché abbiamo $\binom{4}{2}$ modi di scegliere i due mazzi senza assi, otteniamo che la probabilità richiesta in (b) vale

$$\frac{(2\#B_1 + \#B_2)\binom{4}{2}}{\#\Omega} = \frac{48 \times (13)^2 \times 12 \times 11 + 36 \times (13)^2 \times (12)^2}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \approx 0.3$$

Nome:______________________________________

3. **(6 pts)** Si consideri la passeggiata aleatoria sugli interi ottenuta come segue. A ogni unità di tempo si fa un passo a destra con probabilità $1/3$, un passo a sinistra con probabilità $1/3$ e si rimane fermi con probabilità $1/3$. Sia S_n la posizione al tempo n. Supponendo di partire in 0 al tempo 0:

   (a) Calcolare la densità di probabilità della variabile aleatoria S_3.

   (b) Usando la disuguaglianza di Chebyshev, stimare $P(|S_{100}| \geqslant 10)$.

   (c) Usando il teorema del limite centrale, dare un valore approssimato per $P(|S_{100}| \geqslant 10)$.

Soluzione: Per definizione si ha $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ dove le X_i sono variabili indipendenti tali che

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = P(X_i = 0) = 1/3.$$

(a). Notiamo che S_3 può assumere tutti i valori in $R = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Calcoliamo

$$p(j) = P(S_3 = j)\,, \quad j \in R.$$

Per simmetria si ha $p(j) = p(-j)$. Per $j = 3$ si ha $X_1 = X_2 = X_3 = 1$, e dunque per l'indipendenza $p(3) = (1/3)^3 = 1/27$. Per $j = 2$, l'evento $S_3 = 2$ equivale a $X_1 = X_2 = 1$ e $X_3 = 0$ oppure $X_1 = 0$, $X_2 = X_3 = 1$, oppure $X_1 = X_3 = 1$ e $X_2 = 0$. Allora

$$\begin{aligned} p(2) &= P(X_1 = X_2 = 1, X_3 = 0) + P(X_1 = X_3 = 1, X_2 = 0) + P(X_2 = X_3 = 1, X_1 = 0) \\ &= \frac{3}{27} = \frac{1}{9}, \end{aligned}$$

dove usiamo l'indipendenza per ottenere $P(X_1 = X_2 = 1, X_3 = 0) = 1/27$ ecc.
Per l'evento $S_3 = 1$ si devono fare due salti in avanti e uno indietro, oppure uno in avanti e due salti nulli. In entrambi i casi ci sono 3 modi distinti, per cui si ottiene:

$$p(1) = \frac{3}{27} + \frac{3}{27} = \frac{2}{9}.$$

Inoltre $p(0) = 1 - 2p(1) - 2p(2) - 2p(3) = 1 - 20/27 = 7/27$. Questo determina la densità:

$$p(0) = \frac{7}{27}\,,\ p(1) = p(-1) = \frac{2}{9}\,,\ p(2) = p(-2) = \frac{1}{9}\,,\ p(3) = p(-3) = \frac{1}{27}.$$

(b). Per simmetria abbiamo $E[S_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = 0$. Dunque per Chebyshev, per $t > 0$:

$$P(|S_n| \geqslant t) = P(|S_n - E[S_n]| \geqslant t) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{t^2}.$$

Inoltre per l'indipendenza si ha $\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = nE[X_1^2] = 2n/3$. Ponendo $n = 100$ e $t = 10$ si ha

$$P(|S_{100}| \geqslant 10) \leqslant \frac{200}{300} = \frac{2}{3}.$$

(c). Dal teorema del limite centrale sappiamo che la variabile $Z_n = (S_n - E[S_n])/\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}$ approssima una normale standard. Allora $|S_{100}| \geqslant 10$ equivale a $|Z_{100}| \geqslant 10/\sqrt{200/3} = \sqrt{3/2}$. La probabilità di questo evento è circa $2(1 - \Phi(\sqrt{3/2}))$. Quindi

$$P(|S_{100}| \geqslant 10) \approx 2(1 - \Phi(\sqrt{3/2})) \approx 0.22$$

Nome:______________________________________

4. **(6 pts)** Durante una gita scolastica 90 studenti si distribuiscono in tre vagoni di un treno, in maniera tale che il primo vagone ha 40 studenti, il secondo 20 e il terzo 30.

   (a) Scegliamo un vagone a caso. Qual'è il numero medio di studenti in quel vagone ?

   (b) Scegliamo uno studente a caso. Qual'è il numero medio di studenti nel suo vagone ?

   (c) Scegliamo uno studente a caso. Sapendo che il numero di studenti nel suo vagone è almeno 30, qualè la probabilità che lo studente sia nel primo vagone ?

Soluzione: Nel primo caso si hanno 40 studenti con prob. 1/3, 20 con prob. 1/3, e 30 con prob. 1/3. Quindi il numero medio è 30. Nel secondo caso si hanno 40 studenti con prob. 40/90, 20 con prob. 20/90, e 30 con prob. 30/90. Quindi il numero medio è

$$40 \times \frac{40}{90} + 20 \times \frac{20}{90} + 30 \times \frac{30}{90} = \frac{2900}{90} \approx 32.2$$

Infine se lo studente scelto a caso ha almeno 30 studenti nel suo vagone, allora deve appartenere al primo oppure al terzo. In totale ci sono 70 studenti in questi due vagoni di cui 40 nel primo vagone, quindi la probabilità che appartenga al primo vale $40/70 = 4/7 \approx 0.571$.

Nome:____

5. **(6 pts)** Sia $A(n)$ la matrice aleatoria con n righe e n colonne i cui elementi $A_{i,j}(n)$ sono variabili esponenziali di parametro 1 indipendenti. Calcolare, nel limite $n \to \infty$:
   (a) il valore atteso del minimo $\min_{i,j} A_{i,j}(n)$;
   (b) la probabilità che il massimo $\max_{i,j} A_{i,j}(n)$ sia maggiore di $2 \log n$;
   (c) la probabilità che esista almeno una riga i tale che $\max_j A_{i,j}(n) < \log 2$.

Soluzione: (a). Le $A_{i,j}(n)$ sono esponenziali di parametro 1 indipendenti, quindi

$$P(\min_{i,j} A_{i,j}(n) > t) = P(A_{i,j}(n) > t\,,\ \forall\, i,j) = P(A_{1,1}(n) > t)^{n^2} = e^{-tn^2}.$$

Allora $\min_{i,j} A_{i,j}(n)$ è esponenziale di parametro n^2. Pertanto

$$E[\min_{i,j} A_{i,j}(n)] = \frac{1}{n^2} \ \to\ 0.$$

(b). Per il massimo si ha

$$P(\max_{i,j} A_{i,j}(n) < t) = P(A_{i,j}(n) < t\,,\ \forall\, i,j) = P(A_{1,1}(n) < t)^{n^2} = (1 - e^{-t})^{n^2}.$$

Ponendo $t = 2\log n$, si ha $e^{-t} = n^{-2}$. Ne segue

$$P(\max_{i,j} A_{i,j}(n) > 2\log n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \ \to\ 1 - e^{-1}$$

(c). Sia $E(t)$ l'evento che per ogni riga i si ha $\max_{j=1,\dots,n} A_{i,j}(n) > t$. La probabilità richiesta è

$$1 - P(E(\log 2)).$$

Per l'indipendenza delle righe si ha

$$P(E(t)) = P(\max_{j=1,\dots,n} A_{1,j}(n) > t)^n = (1 - P(A_{1,1}(n) < t)^n)^n = (1 - (1 - e^{-t})^n)^n.$$

Valutando in $t = \log 2$, si ha $P(E(\log 2)) = (1 - 2^{-n})^n \to 1$, per $n \to \infty$, ossia $1 - P(E(\log 2)) \to 0$.

*** Notiamo che l'evento nel punto (c) coincide con l'evento $\min_{i=1,\dots,n} \max_{j=1,\dots,n} A_{i,j}(n) < \log 2$, quindi abbiamo mostrato che

$$\lim_{n\to\infty} P(\min_{i=1,\dots,n} \max_{j=1,\dots,n} A_{i,j}(n) < \log 2) = 0.$$

Con lo stesso argomento (ponendo $t = \frac{1}{2}\log n$ e $t = \log n$ rispettivamente) si può vedere per esempio che valgono i limiti

$$\lim_{n\to\infty} P(\min_{i=1,\dots,n} \max_{j=1,\dots,n} A_{i,j}(n) < \frac{1}{2}\log n) = 0\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} P(\min_{i=1,\dots,n} \max_{j=1,\dots,n} A_{i,j}(n) < \log n) = 1,$$

Nome:______________________________________

6. **(6 pts)** Le variabili aleatorie continue X, Y hanno densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,e^{-y} & \text{se } y \geqslant x \geqslant 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove c è un'opportuna costante.

(a) Dire se X e Y sono indipendenti.

(b) Calcolare il valore atteso di X e di Y

(c) Calcolare la covarianza $\mathrm{Cov}(X', Y')$, dove $X' = X - 1$ e $Y' = Y - 1$.

Soluzione: Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geqslant x \geqslant 1\}$. Poiché D non è un rettangolo, X e Y non possono essere indipendenti. Notiamo che

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_1^\infty dx \int_x^\infty c\,e^{-y}dy = \int_1^\infty c\,e^{-x}\,dx = \int_1^\infty c\,e^{-x}\,dx = c\,e^{-1}.$$

Dunque si ha $c = e$. Calcoliamo la marginale su X:

$$f_X(x) = \int_x^\infty c\,e^{-y}dy = e^{-x+1}\,, \qquad x \in [1, \infty).$$

Per la marginale su Y, osserviamo che

$$f_Y(y) = \int_1^y c\,e^{-y}dx = (y-1)e^{-y+1}\,, \qquad y \in [1, \infty).$$

I valori attesi $E[X], E[Y]$ si possono calcolare esplicitamente con gli integrali $E[X] = \int_1^\infty xe^{-x+1}$ e $E[Y] = \int_1^\infty y(y-1)e^{-y+1}$. Il calcolo si semplifica con il cambio di variabile $x' = (x-1)$ e $y' = (y-1)$, che mostra come $X' = X-1$ sia la variabile esponenziale di parametro 1 e $Y' = Y-1$ sia la variabile gamma di parametri $\alpha = 2$ e $\lambda = 1$. In particolare, si ottiene $E[X] = 1 + E[X'] = 2$ e $E[Y] = 1 + E[Y'] = 3$. Inoltre,

$$\mathrm{Cov}(X', Y') = E[X'Y'] - E[X']E[Y'] = E[X'Y'] - 2.$$

Il valore atteso $E[X'Y']$ vale

$$\begin{aligned} E[X'Y'] &= \int_{\mathbb{R}^2} (x-1)(y-1)f(x,y)dxdy = \int_1^\infty (y-1)e^{-y+1}dy \int_1^y (x-1)dx \\ &= \int_1^\infty \frac{(y-1)^3}{2}\,e^{-y+1}dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^3\,e^{-t}dt = \frac{1}{2}\,\Gamma(4) = 3. \end{aligned}$$

In conclusione, $\mathrm{Cov}(X', Y') = 1$. Osserviamo che per le note proprietà della covarianza si ha anche $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X', Y') = 1$.

Nome:____