Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2012-13, II semestre
2 luglio, 2013

CP110 Probabilità: Esame 2 luglio 2013

Testo e soluzione

Nome:____

1. **(6 pts)** Due mazzi di carte francesi vengono uniti e mischiati. Successivamente le carte vengono estratte senza rimpiazzo una alla volta.

   (a) Qual'è la probabilità che le prime due carte estratte provengano dallo stesso mazzo ?

   (b) Qual'è la probabilità che i primi due assi estratti provengano dallo stesso mazzo ?

Soluzione:
(a). Le carte sono $2 \times 52 = 104$ e si hanno 104! sequenze distinte per le possibili estrazioni. Il numero di sequenze che hanno la prima carta proveniente dal primo mazzo vale $52 \times 103!$. Il numero di sequenze che hanno la prima e la seconda carta provenienti dal primo mazzo vale $52 \times 51 \times 102!$. Quindi se A_i, $i = 1, 2$, è l'evento che la prima e la seconda carta provengono entrambe dal mazzo i, la probabilità richiesta vale

$$P(A_1) + P(A_2) = 2 \times \frac{52 \times 51 \times 102!}{104!} = \frac{51}{103}$$

(b). Per la seconda domanda possiamo procedere condizionando rispetto alla posizione dei primi due assi. Supponiamo di sapere che il primo asso è nella posizione i (ossia appare alla i-esima estrazione), e il secondo asso è nella posizione $i + k$, con $i, k \in \mathbb{N}$ fissati. Il numero di sequenze con questa proprietà vale

$$N = 96 \times \cdots \times (96 - i + 2) \times 8 \times (96 - i + 1) \times \cdots \times (96 - i - k + 3) \times 7 \times (104 - i - k)!$$

dove $96 \times \cdots \times (96-i+2)$ sta per il numero di scelte delle prime $i-1$ carte ($104-8 = 96$ è il numero di carte diverse da asso), 8 è il numero di scelte per il primo asso, $(96-i+1) \times \cdots (96-i-k+3)$ sta per il numero di scelte delle $k - 1$ carte dalla posizione $i + 1$ alla $i + k - 1$, 7 è il numero di scelte per il secondo asso, e $(104 - i - k)!$ è il numero delle sequenze rimanenti dopo la scelta delle prime $i + k$ carte. Notiamo che questa formula vale purché si faccia la convenzione che $96 \times \cdots \times (96 - i + 2) = 1$ se $i = 1$, e $(96 - i + 1) \times \cdots \times (96 - i - k + 3) = 1$ se $k = 1$. Sia M il numero di queste N sequenze tali che il primo asso e il secondo provengono dal mazzo 1. Allora si ha

$$M = 96 \times \cdots \times (96 - i + 2) \times 4 \times (96 - i + 1) \times \cdots \times (96 - i - k + 3) \times 3 \times (104 - i - k)!$$

Condizionatamente ad avere il primo asso in i e il secondo in $i+k$ la probabilità che provengano entrambi dal primo mazzo allora vale

$$\frac{M}{N} = \frac{4 \times 3}{8 \times 7} = \frac{3}{14}.$$

La probabilità che provengano dallo stesso mazzo dunque vale

$$2 \times \frac{M}{N} = 2 \times \frac{4 \times 3}{8 \times 7} = \frac{3}{7}.$$

In particolare, questa non dipende dal valore di i e k. Allora, sommando su tutte le scelte di i, k, ciascuna con la sua probabilità, per il punto (b) si ottiene il risultato $\frac{3}{7}$.

Nome:____

2. **(6 pts)** Un giocatore di dadi può scegliere uno dei seguenti due giochi. Nel gioco 1 il giocatore lancia 5 dadi: per ogni dado maggiore di 4 vince 2 euro, e per ogni dado minore o uguale di 4 perde 1 euro. Nel gioco 2 il giocatore lancia 5 dadi, 3 blu e 2 rossi: per ogni dado blu maggiore di 4 vince 1 euro, e per ogni dado blu minore o uguale di 4 perde 1 euro; per ogni dado rosso uguale a 6 vince 5 euro. Confrontando i valori attesi nei due giochi, dire quale dovrebbe scegliere.

Soluzione:
Gioco 1. Sia X_i la vincita corrispondente al dado i. Si ha

$$P(X_i = +2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,, \qquad P(X_i = -1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Quindi $E[X_i] = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$. Allora la vincita complessiva ha valore atteso

$$E[X] = \sum_{i=1}^{5} E[X_i] = 0.$$

Gioco 2. Sia X la vincita relativa ai dadi blu, e Y la vincita relativa ai dadi rossi. Se X_i è la vincita corrispondente al dado i di colore blu, si ha

$$P(X_i = +1) = \frac{1}{3}\,, \qquad P(X_i = -1) = \frac{2}{3}, \qquad E[X_i] = -\frac{1}{3}.$$

Dunque

$$E[X] = \sum_{i=1}^{3} E[X_i] = -1.$$

Se N è il numero di 6 nei due dadi rossi si ha $Y = 5N$. Quindi

$$E[Y] = 5E[N] = 5[P(N = 1) + 2P(N = 2)] = 5\left[2 \times \frac{5}{6}\frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6}\frac{1}{6}\right] = \frac{5}{3}$$

La vincita totale nel gioco 2 vale

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] = -1 + \frac{5}{3} = \frac{2}{3}.$$

Dunque il confronto dei valori attesi favorisce il gioco 2.

Nome:____

3. **(6 pts)** Sia X una variabile aleatoria continua con densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{-x} & x \geqslant 0 \\ \\ e^{-2|x|} & x < 0 \end{cases}$$

Calcolare:

a) Il valore atteso di X

b) La varianza di X

c) La probabilità dell'evento $|X| > 1$.

Soluzione:
Osserviamo che f è una densità di probabilità. Infatti

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-2|x|}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x}dx + \int_0^{\infty} e^{-2x}dx = 1.$$

a). Per il valore atteso scriviamo

$$\begin{aligned} E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} xe^{-x}dx + \int_{-\infty}^{0} xe^{-2|x|}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} xe^{-x}dx - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} 2xe^{-2x}dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

dove usiamo il fatto che $\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$, per ogni $\lambda > 0$.

b). Calcoliamo $E[X^2]$:

$$\begin{aligned} E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} 2x^2 e^{-2|x|}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^2 e^{-x}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} 2x^2 e^{-2x}dx = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{4}\right) = \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

dove usiamo il fatto che $\int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$, per ogni $\lambda > 0$. Per la varianza di X otteniamo:

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{16} = \frac{19}{16}.$$

c). Abbiamo

$$\mathbb{P}(|X| > 1) = \mathbb{P}(X > 1) + \mathbb{P}(X < -1) = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} e^{-x}dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1} 2e^{-2|x|}dx = \frac{1}{2}(e^{-1} + e^{-2}).$$

Nome:____

4. **(6 pts)** Sia $\mathcal{R}$ un rettangolo di lati $a > 0$ e $b = 2a$. Sia P un punto scelto uniformemente a caso in $\mathcal{R}$. Calcolare:

   (a) la probabilità che la distanza tra P e il centro C di $\mathcal{R}$ sia meno di $a/2$.

   (b) la probabilità che per ogni vertice V di R la distanza tra P e V sia maggiore di $a/2$.

Soluzione:
a). Il cerchio $\mathcal{C}$ di raggio $a/2$ centrato in C è contenuto in $\mathcal{R}$. L'area di $\mathcal{C}$ vale $\pi a^2/4$. Pertanto la prob. richiesta vale

$$\mathbb{P}(P \in \mathcal{C}) = \frac{\text{Area}(\mathcal{C})}{\text{Area}(\mathcal{R})} = \frac{\pi a^2/4}{ab} = \frac{\pi a}{4b} = \frac{\pi}{8}.$$

b). Siano V_i, $i = 1, \ldots, 4$ i vertici di $\mathcal{R}$. Sia E_i l'evento che P dista piú di $a/2$ da V_i. Vogliamo

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^4 E_i) = 1 - \mathbb{P}(\cup_{i=1}^4 E_i^c).$$

Osserviamo che E_i^c, $i = 1, \ldots, 4$ sono eventi disgiunti, essendo $a \leqslant b$. Allora

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^4 E_i) = 1 - \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(E_i^c) = 1 - 4\mathbb{P}(E_1^c),$$

dove usiamo anche la simmetria. Per il calcolo di $\mathbb{P}(E_1^c)$ osserviamo che E_1^c è l'evento che P appartiene a $\mathcal{C}_1$, dove $\mathcal{C}_1$ è il cerchio di raggio $a/2$ centrato in V_1. Allora

$$\mathbb{P}(E_1^c) = \mathbb{P}(P \in \mathcal{C}_1) = \frac{\text{Area}(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{R})}{\text{Area}(\mathcal{R})} = \frac{\pi a^2/16}{ab} = \frac{\pi a}{16b}.$$

In conclusione

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^4 E_i) = 1 - \frac{\pi}{8}.$$

Nome:____

5. **(6 pts)** Un'urna contiene 8 palline, 4 rosse e 4 nere. Estraiamo (senza rimpiazzo) 2 palline e denotiamo con X il numero di palline nere tra queste. Successivamente estraiamo (senza rimpiazzo) altre 2 palline e denotiamo con Y il numero di palline nere tra queste. Calcolare

   (a) la densità di probabilità congiunta di X, Y.

   (b) i valori attesi $E[X], E[Y]$ e $E[XY]$.

Soluzione:
(a). Abbiamo due variabili aleatorie a valori in $\{0,1,2\}$, dunque la denistà congiunta è una matrice 3×3, che indichiamo con $p(i,j) = P(X = i, Y = j)$. Notiamo che, per $i \in \{0,1,2\}$ si ha

$$P(X = i) = \frac{\binom{4}{i}\binom{4}{2-i}}{\binom{8}{2}} = \begin{cases} \frac{3}{14} & i = 0 \\ \frac{4}{7} & i = 1 \\ \frac{3}{14} & i = 2 \end{cases}$$

Inoltre, condizionando all'evento $X = i$, per $j \in \{0,1,2\}$ si ha

$$P(Y = j | X = i) = \frac{\binom{4-i}{j}\binom{4-(2-i)}{2-j}}{\binom{6}{2}}$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} p(i,j) = P(X = i)P(Y = j|X = i) &= \frac{\binom{4}{i}\binom{4}{2-i}}{\binom{8}{2}} \frac{\binom{4-i}{j}\binom{2+i}{2-j}}{\binom{6}{2}} \\ &= \frac{4!4!4!2!2!}{j!i!(2-j)!(2-i)!(i+j)!(4-i-j)!8!} \end{aligned}$$

Semplificando, la matrice p è data da

$$p = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 8 & 24 & 8 \\ 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

(b). Per la simmetria della matrice p abbiamo che X e Y hanno la stessa marginale, e dunque $E[X] = E[Y]$. Allora

$$E[Y] = E[X] = P(X = 1) + 2P(X = 2) = \frac{4}{7} + \frac{6}{14} = 1.$$

Inoltre

$$E[XY] = \sum_{i,j} ijp(i,j) = p(1,1) + 2p(1,2) + 2p(2,1) + 4p(2,2) = \frac{1}{70}(24 + 32 + 4) = \frac{6}{7}.$$

Nome:____

6. **(6 pts)** Si consideri la passeggiata aleatoria sugli interi che a ogni unità di tempo fa un passo a destra con probabilità $1/2$ e un passo a sinistra con probabilità $1/2$. Sia S_n la posizione dopo n passi. Supponendo di partire in 0 al tempo 0:

   (a) Scrivere la densità di probabilità della variabile S_n.

   (b) Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} P(S_n \leqslant 2\sqrt{n})$

   (c) Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} P(S_n \leqslant -2n)$

Soluzione:
(a). Sia M il numero di passi a destra su n passi. Allora $S_n = M - (n - M) = 2M - n$. Quindi $M = (S_n + n)/2$. Inoltre M è una binomiale $\text{Bin}(n, 1/2)$. Ne segue che la variabile aleatoria S_n prende valori in $\{-n, \dots, n\}$ con densità di probabilità

$$p(k) = P(S_n = k) = P\Big(M = \frac{k+n}{2}\Big) = 2^{-n}\binom{n}{\frac{k+n}{2}}, \qquad k \in \{-n, \dots, n\},$$

dove è sottointeso che l'espressione vale zero se $k + n$ è dispari.

(b). Siano X_i v.a. indipendenti con $X_i = \pm 1$ con prob. $1/2, 1/2$, in modo che $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Si ha $E[X_i] = 0$ e $\text{Var}(X_i) = 1$. Allora $E[S_n] = 0$ e la varianza di S_n vale $\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = n$. Allora, per n grandi, la v.a. $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_n$ è approssimata da una normale standard per il teorema del limite centrale. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \leqslant 2\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n \leqslant 2) = \Phi(2),$$

dove $\Phi(t) = P(Z \leqslant t)$, $t \in \mathbb{R}$, se Z è la normale standard.

(c). Poiché S_n non può essere minore di $-n$ si ha $P(S_n \leqslant -2n) = 0$ per ogni n e dunque anche nel limite $n \to \infty$.