Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2012-13, II semestre
2 settembre, 2013

# CP110 Probabilità: Esame 2 settembre 2013
# Testo e soluzione

Nome:______________________________________

1. **(6 pts)** Abbiamo due mazzi di carte francesi, il mazzo A e il mazzo B. Estraiamo 10 carte a caso dal mazzo A e 10 carte a caso dal mazzo B. Calcolare

   (a) la probabilità che non ci siano carte uguali tra loro nelle 20 carte estratte.

   (b) la probabilità che ci siano esattamente due carte uguali tra loro nelle 20 carte estratte.

**Soluzione:** Consideriamo una permutazione aleatoria delle carte del mazzo A e una permutazione aleatoria delle carte del mazzo B tale che le prime dieci carte di ogni mazzo siano quelle estratte. Fissiamo la permutazione del mazzo A. Il numero totale di scelte delle prime dieci carte di B è pari a $\frac{52!}{42!}$. Se non ci sono ripetizioni vuol dire che per quanto riguarda il mazzo B, la prima carta del mazzo ha $52-10=42$ valori possibili, la seconda ha $52-11=41$ valori possibili ecc. fino alla decima, che ha $52-19=33$ valori possibili. Vale a dire che ci sono $\frac{42!}{32!}$ possibili scelte per le prime dieci carte di B che non abbiano valori che appaiono gia' nelle prime dieci del mazzo A. Dunque, fissata la permutazione del mazzo A, la probabilità richiesta vale

$$\frac{\frac{42!}{32!}}{\frac{52!}{42!}}=\frac{(42!)^2}{32!52!}=\frac{42\times\cdots\times 33}{52\times\cdots\times 43}\approx 0.093$$

Poiché il numero non dipende dalla permutazione del mazzo A, l'espressione ottenuta sopra fornisce la risposta al punto (a).

Per avere due carte uguali, ripetiamo il ragionamento precedente. Fissiamo la permutazione del mazzo A. Il numero totale di scelte delle prime dieci carte di B è pari a $\frac{52!}{42!}$. Se nelle 20 carte abbiamo due carte uguali vuol dire che nelle prime dieci carte di B c'e' esattamente una carta che compare nelle prime dieci di A. Se questa carta è nella posizione $i\in\{1,\dots,10\}$ nel mazzo B allora ci sono dieci valori possibili per questa carta e $42\times\cdots\times 34$ per le carte nelle rimanenti 9 posizioni. Poiché $i$ puo' prendere 10 valori distinti, abbiamo un totale di

$$10\times 10\times 42\times\cdots\times 34$$

sequenze con la proprieta' richiesta. Quindi la probabilità vale

$$\frac{10\times 10\times 42\times\cdots\times 34}{52\times\cdots\times 43}\approx 0.281$$

Poiché il numero non dipende dalla permutazione del mazzo A, l'espressione ottenuta sopra fornisce la risposta al punto (b).

Nome:________________________________________

2. **(6 pts)** Un giocatore di dadi lancia ripetutamente tre dadi fino a ottenere tre numeri uguali. Puo' scegliere tra due diverse modalità di gioco. Nel gioco 1, il giocatore a ogni passo lancia tutti e tre i dadi e si ferma quando sono tutti uguali. Nel gioco 2, il giocatore comincia lanciando tutti e tre i dadi, e a ogni passo, se i tre dadi sono uguali il gioco si ferma; se i tre dadi sono tutti distinti allora vengono lanciati tutti e tre nuovamente; se esattamente due dadi sono uguali tra loro, allora viene lanciato solo l'altro dado ripetutamente fino a ottenere il numero uguale agli altri due. Confrontando il valore atteso del numero di prove nei due giochi, dire quale gioco si dovrebbe scegliere per minimizzare il numero di prove.

**Soluzione:**
Gioco 1. Il numero di prove $N$ è una variabile geometrica di parametro $p = 6 * (1/6)^3 = 1/36$. Allora in media servono $E[N] = 1/p = 36$ prove.
Gioco 2: Un lancio di tre dadi puo' avere tre esiti: tutti uguali, tutti distinti oppure esattamente due uguali. La prob. di avere tre dadi distinti vale $q = 6 * 5 * 4 * (1/6)^3 = 20/36$; la prob. di avere tre dadi uguali vale $p = 1/36$ come sopra; la prob. di avere esattamente due uguali vale $1-p-q = 15/36$. Sia $N$ il numero di prove necessarie per terminare il gioco. Sia $N_1$ il numero di prove per ottenere almeno due dadi uguali. Allora $N_1$ è una variabile geometrica di parametro $1 - q = 16/36$, e $E[N_1] = 36/16$. Chiaramente $N_1 \leqslant N$. Sia $E$ l'evento che alla prova $N_1$ i dadi sono tutti uguali. Se si realizza $E$, allora si ha $N_1 = N$ e il gioco si ferma, altrimenti si ha $N = N_1 + N_2$, ossia il gioco dura ancora un tempo aleatorio $N_2$ che vale in media $E[N_2] = 6$, essendo questo il numero medio di lanci di un dado necessario per ottenere per la prima volta un numero dato. Si ottiene

$$E[N] = E[N_1] + (1 - P(E))E[N_2] = 36/16 + 6(1 - P(E)).$$

Per calcolare $P(E)$, notiamo che per $k$ fissato, l'evento $E \cap \{N_1 = k\}$ equivale a chiedere che le prime $k-1$ prove risultano in dadi tutti differenti, mentre la $k$-esima risulta in tre dadi uguali. Allora $P(E \cap \{N_1 = k\}) = q^{k-1}p$. Sommando su $k$ si ha

$$P(E) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E \cap \{N_1 = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = \frac{p}{1-q} = \frac{1}{16}$$

Mettendo tutto insieme si ha

$$E[N] = 36/16 + 6 \times 15/16 = 126/16 = 63/8.$$

Poiché $63/8 < 36$ il confronto dei valori attesi favorisce il gioco 2.

Per una soluzione alternativa. Sia $p(k) = P(N = k)$, e sia $N_1$ come sopra. Allora

$$p(k) = P(N = k, N_1 = k) + P(N = k, N_1 < k) = P(N = k, N_1 = k) + \sum_{j=1}^{k-1} P(N = k, N_1 = j).$$

Come abbiamo visto sopra, si ha $P(N = k, N_1 = k) = q^{k-1}p$, mentre, se $k > j \geqslant 1$ si ha:

$$P(N = k, N_1 = j) = q^{j-1}(1 - q - p)(5/6)^{k-j-1}\frac{1}{6}$$

Allora

$$E[N] = \sum_{k=1}^{\infty} kp(k) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p + \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}(1 - q - p) \sum_{k=j+1}^{\infty} k(5/6)^{k-j-1}\frac{1}{6}$$

Inoltre $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = \frac{p}{(1-q)^2}$ e $\sum_{k=j+1}^{\infty} k(5/6)^{k-j-1}\frac{1}{6} = 6 + j$. In conclusione

$$\begin{aligned}
E[N] &= \sum_{k=1}^{\infty} kp(k) = \frac{p}{(1-q)^2} + \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}(1 - q - p)(6 + j) \\
&= \frac{p}{(1-q)^2} + 6(1 - q - p)/(1 - q) + (1 - q - p)/(1 - q)^2 = [6(1 - q - p) + 1]/(1 - q) \\
&= \frac{15/6 + 1}{16/36} = \frac{21 \times 6}{16} = \frac{63}{8}.
\end{aligned}$$

Nome:________________________________________

3. **(6 pts)** Le variabili aleatorie continue $X, Y$ hanno densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,x(x+y) & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1\,,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $c$ è un'opportuna costante.

(a) Calcolare il valore atteso di $X$ e di $Y$

(b) Calcolare la covarianza $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(c) $X$ e $Y$ sono indipendenti ?

**Soluzione:**
a). Calcoliamo il valore di $c$:

$$\begin{aligned} c\int_0^1\int_0^1 x(x+y)dxdy &= c\int_0^1 x^2dx\int_0^1 dy + c\int_0^1 xdx\int_0^1 ydy \\ &= c\,\frac{1}{3} + c\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = c\,\frac{7}{12}\,, \qquad c = \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

La marginale X ha densità

$$f_X(x) = c\int_0^1 x(x+y)dy = c\,x^2 + \frac{c}{2}\,x$$

Allora
$$E[X] = \int_0^1 xf_X(x)dx = c\int_0^1 x^3dx + \frac{c}{2}\int_0^1 x^2dx = \frac{c}{4} + \frac{c}{6} = \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$$
La marginale Y ha densità

$$f_Y(y) = c\int_0^1 x(x+y)dx = \frac{c}{3} + \frac{c}{2}\,y$$

Allora
$$E[Y] = \int_0^1 yf_Y(y)dy = \frac{c}{3} = \frac{4}{7}.$$

Calcoliamo ora la covarianza. Abbiamo
$$E[XY] = \int_0^1\int_0^1 xyf(x,y)dxdy = c\int_0^1\int_0^1 (x^3y + x^2y^2)dxdy = \frac{c}{8} + \frac{c}{9} = \frac{3}{14} + \frac{4}{21} = \frac{17}{42}.$$
Allora
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{17}{42} - \frac{20}{49}.$$
In particolare, abbiamo $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$, e quindi le variabili non sono indipendenti.

Nome:______________________________________

4. **(6 pts)** Sia $\mathcal{Q}$ il quadrato di lato 2 centrato nell'origine del piano e sia $\mathcal{R}$ il rettangolo con base 2 e altezza 1 centrato nell'origine. Siano $P_1, \dots, P_n$ punti indipendenti scelti uniformemente a caso in $\mathcal{Q}$.

   (a) Calcolare la probabilità che $P_1$ appartenga a $\mathcal{R}$.

   (b) Fornire un'espressione in termini di $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-z^2/2} dz$ per la probabilità che il punto $\bar{P}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(P_1 + \cdots + P_n)$ appartenga a $\mathcal{R}$ nel limite $n \to \infty$[1]

**Soluzione:**
a). Poniamo $P_i = (X_i, Y_i)$ dove $X_i$, $Y_i$ sono indipendenti e uniformi in $[-1, 1]$. Allora

$$P(P_1 \in \mathcal{R}) = P(X_1 \in [-1,1], Y_1 \in [-0.5, 0.5]) = P(X_1 \in [-1,1])P(Y_1 \in [-0.5, 0.5]) = \frac{1}{2}.$$

b). Notiamo che le variabili $X_i$ e $Y_i$ hanno media nulla e varianza pari a $4/12 = 1/3$. Per il teorema del limite centrale nel limite $n \to \infty$ si ha che $\sqrt{3}\bar{P}_n$ converge in distribuzione al punto aleatorio del piano $\bar{Z} = (Z_1, Z_2)$ dove $Z_1, Z_2$ sono due normali standard indipendenti. Allora

$$\begin{aligned} P(\bar{P}_n \in \mathcal{R}) \to & P(Z_1/\sqrt{3} \in [-1, 1],\ Z_2/\sqrt{3} \in [-0.5, 0.5]) \\ & = P(Z_1 \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}])\, P(Z_2 \in [-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2]) \\ & = (2\Phi(\sqrt{3}) - 1)(2\Phi(\sqrt{3}/2) - 1). \end{aligned}$$

[1] Notazione: $P_1 + \cdots + P_n$ è la somma vettoriale di $n$ vettori con due componenti ciascuno

Nome:________________________________________

5. **(6 pts)** Siano $X_1, X_2, X_3$ tre variabili esponenziali indipendenti di parametro $\lambda = 0.5$. Calcolare

   (a) $E[(3X_1 + X_2)(X_3 - 1)]$

   (b) $E[X_1X_2X_3 - 2X_1X_2]$

   (c) $\mathrm{Cov}(2X_1 - X_3, X_2 - X_3)$

**Soluzione:**

(a). Per la linearità e l'indipendenza:

$$E[(3X_1 + X_2)(X_3 - 1)] = 3E[X_1]E[X_3] + E[X_2]E[X_3] - 3E[X_1] - E[X_2].$$

Usando $E[X_i] = 1/\lambda = 2$ abbiamo $E[(3X_1 + X_2)(X_3 - 1)] = 8$.
(b). Allo stesso modo si ha

$$E[X_1X_2X_3 - 2X_1X_2] = E[X_1]E[X_2]E[X_3] - 2E[X_1]E[X_2] = 0.$$

(c). Per la covarianza, usando $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ per $i \neq j$, abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(2X_1 - X_3, X_2 - X_3) &= 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) - \mathrm{Cov}(X_3, X_2) - 2\mathrm{Cov}(X_1, X_3) + \mathrm{Var}(X_3)\\ &= \mathrm{Var}(X_3) = \frac{1}{\lambda^2} = 4,\end{aligned}$$

dove usiamo il fatto che la varianza di un'esponenziale di parametro $\lambda$ è pari a $1/\lambda^2$.

Nome:________________________________________

6. **(6 pts)** Enunciare e fornire una dimostrazione di:

   (a) Disuguaglianza di Markov

   (b) Disuguaglianza di Chebyshev

   (c) Legge dei grandi numeri