Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2012-13, II semestre
27 gennaio, 2013

CP110 Probabilità: Esame 27 gennaio 2013

Testo e soluzione

Nome:____

1. **(6 pts)** Tre amici dispongono di 6 monete da un euro e considerano due modi differenti di dividerle. Nel primo caso, ogni moneta viene assegnata indipendentemente a caso a uno dei tre amici. Nel secondo caso le monete si considerano indistinguibili, e vengono distribuite in maniera arbitraria di modo che ogni possibile esito della distribuzione sia equiprobabile. Calcolare la probabilità che ognuno abbia almeno una moneta nei due differenti casi.

Soluzione: Nel primo caso abbiamo 3^6 possibili esiti, tutti equiprobabili. Calcoliamo quanti di questi hanno la proprietà desiderata, ossia che ognuno dei tre abbia almeno una moneta. Il numero di esiti che non hanno la suddetta proprietà è dato dal numero di esiti tali che tutte le monete appartengono a una sola persona, che vale 3, più il numero di esiti tali che tutte le monete siano in mano a due persone (ciascuna con almeno 1 moneta), che vale $3 \times (2^6 - 2)$. Quindi la probabilità richiesta vale

$$1 - \frac{3 + 3 \times (2^6 - 2)}{3^6} = 1 - \frac{2^6 - 1}{3^5} = \frac{180}{243} \approx 0.74$$

Nel secondo caso si hanno

$$\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2}$$

possibili esiti ($n = 6$ palline indistinguibili in $k = 3$ buche), tutti equiprobabili. Di questi, calcoliamo quanti hanno almeno una moneta per persona. Se togliamo 3 monete, una per ogni persona, rimangono 3 monete da distribuire arbitrariamente. Pertanto si hanno

$$\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2}$$

esiti distinti con la proprietà suddetta. In conclusione la probabilità richiesta vale

$$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28} \approx 0.36$$

Nome:____________________________________

2. **(6 pts)** La squadra A e la squadra B giocano una partita di calcio. Supponiamo che il numero di reti messe a segno da A e da B siano due variabili di Poisson indipendenti di parametro $\lambda_A = 0.5$ e $\lambda_B = 1.5$ rispettivamente. Calcolare:

   (a) La probabilità che la partita finisca 1 a 1;

   (b) Il numero medio di reti segnate in totale;

   (c) La probabilità che la squadra B non subisca reti sapendo che in totale vengono segnate 2 reti.

Soluzione: Siano X_A e X_B il numero di reti segnate da A e B rispettivamente.

a. La partita finisce 1 a 1 se $X_A = X_B = 1$, che ha probabilità

$$P(X_A = X_B = 1) = P(X_A = 1)P(X_B = 1) = \lambda_A e^{-\lambda_A} \lambda_B e^{-\lambda_B} = \frac{3}{4}\, e^{-2}$$

b. Il numero di reti totale è $X_A + X_B$, che essendo somma di Poisson indipendenti è una Poisson di parametro $\lambda_A + \lambda_B = 2$. Allora il numero medio vale $\lambda_A + \lambda_B = 2$.

c. la probabilità richiesta vale

$$\begin{aligned} P(X_A = 0 | X_A + X_B = 2) &= \frac{P(X_A = 0)P(X_B = 2)}{P(X_A + X_B = 2)} \\ &= \frac{e^{-\lambda_A} \lambda_B^2 e^{-\lambda_B}/2}{(\lambda_A + \lambda_B)^2 e^{-(\lambda_A + \lambda_B)}/2} = \frac{\lambda_B^2}{(\lambda_A + \lambda_B)^2} = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Nome:______________________________________

3. **(6 pts)** Le variabili aleatorie continue X e Y hanno densità di probabilità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,e^{-2y} & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant y < \infty \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove c è un'opportuna costante.

(a) Dire se X e Y sono indipendenti

(b) Calcolare c

(c) Calcolare il valore atteso della area di un rettangolo di base X e altezza Y.

Soluzione: Le variabili non sono indipendenti poiché la condizione $0 \leqslant x \leqslant y < \infty$ non è di tipo rettangolare.

Per il valore di c abbiamo

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = c\int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} e^{-2y}dy$$

Si calcola

$$\int_x^{\infty} e^{-2y}dy = e^{-2x}\int_x^{\infty} e^{-2(y-x)}dy = e^{-2x}\int_0^{\infty} e^{-2t}dt = \frac{1}{2}\,e^{-2x}$$

Dunque

$$\int_0^{\infty} dx \int_x^{\infty} e^{-2y}dy = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2x}dx = \frac{1}{4}$$

Allora $c = 4$.

L'area del rettangolo vale $X \times Y$, dunque il suo valore atteso è

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = c\int_0^{\infty} xdx \int_x^{\infty} y\,e^{-2y}dy$$

Per ogni $x \geqslant 0$ fissato si ha

$$\begin{aligned}\int_x^{\infty} y\,e^{-2y}dy &= e^{-2x}\int_x^{\infty}(y-x)\,e^{-2(y-x)}dy + xe^{-2x}\int_x^{\infty} e^{-2(y-x)}dy \\ &= \frac{1}{2}\,e^{-2x}\int_0^{\infty} 2t\,e^{-2t}dt + \frac{1}{2}\,xe^{-2x}\int_0^{\infty} 2e^{-2t}dt = \frac{1}{4}\,e^{-2x}\,(1+2x)\end{aligned}$$

Dunque

$$\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,(1+2x)dx = \frac{1}{4} + \int_0^{\infty} 2x^2e^{-2x}dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

In conclusione

$$E[XY] = c\int_0^{\infty} xdx \int_x^{\infty} y\,e^{-2y}dy = \frac{3}{4}$$

Nota: allo stesso risultato si può arrivare osservando che X e $Y - X$ sono variabili indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$ e quindi

$$E[XY] = E[X(Y-X)] + E[X^2] = E[X]^2 + E[X^2] = (1/\lambda)^2 + 2/\lambda^2 = \frac{3}{4}.$$

Nome:____

4. **(6 pts)** Un produttore di vino si accorge che circa 1% delle bottiglie da lui prodotte presenta un difetto che ne altera il gusto. Egli considera che una cassa da 100 bottiglie è guasta se ci sono almeno 2 bottiglie difettose. Utilizzando l'approssimazione di Poisson, stimare:

   (a) Il numero medio di casse guaste se 10^4 bottiglie sono divise in casse da 100 bottiglie ciascuna;

   (b) La probabilità che una cassa guasta contenga piú di 2 bottiglie difettose.

Soluzione: Supponiamo che il numero di bottiglie difettose in una cassa sia una variabile di Poisson di parametro $\lambda = 100 \times 0.01 = 1$. La probabilità che una cassa abbia almeno 2 bottiglie difettose vale allora $1 - 2e^{-1}$. Il numero medio di casse con tale proprietà sarà dunque $100 \times (1 - 2e^{-1}) \approx 26.42$.

Sia A l'evento che la cassa è guasta, ossia contiene almeno due bottiglie difettose. Sia B l'evento che ne contenga piú di 2 difettose. Allora

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1 - 5e^{-1}/2}{1 - 2e^{-1}}$$

Nome:____

5. **(6 pts)** Siano X_1, X_2, X_3 tre variabili normali indipendenti di parametri $\mu_1 = \mu_2 = 2\mu_3 = 1$ e $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$ e sia $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Per ogni $x \in \mathbb{R}$, esprimere la probabilità $P(2X_1 + X_2 - 2X_3 \leqslant x)$ in termini della funzione Φ.

   (b) Calcolare la varianza $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + 2X_3)$

   (c) Calcolare la covarianza $\mathrm{Cov}(X_1 - 2X_3, 2X_2 + X_3)$

Soluzione: Sappiamo che $aX_1 + bX_2 + cX_3$ è una normale di media

$$\mu = a\mu_1 + b\mu_2 + c\mu_3 = a + b + c/2$$

e varianza

$$\sigma^2 = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + c^2\sigma_3^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Allora $(aX_1 + bX_2 + cX_3 - \mu)/\sigma$ è una normale standard e abbiamo

$$P(aX_1 + bX_2 + cX_3 \leqslant x) = P((aX_1 + bX_2 + cX_3 - \mu)/\sigma \leqslant (x - \mu)/\sigma) = \Phi((x - \mu)/\sigma)$$

Nel caso richiesto:

$$P(2X_1 + X_2 - 2X_3 \leqslant x) = \Phi((x - 2)/3).$$

La varianza di $X_1 + X_2 + 2X_3$ vale

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + 2X_3) = 6$$

Per l'indipendenza si ha

$$\mathrm{Cov}(X_1 - 2X_3, 2X_2 + X_3) = -2\mathrm{Var}(X_3) = -2.$$

Nome:____

6. **(6 pts)** Enunciare e fornire cenni di dimostrazione del teorema del limite centrale