Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2012-13, II semestre
28 marzo, 2013

CP110 Probabilità: Esonero 1, 28 marzo 2013

Testo e soluzione

Nome:____

1. **(8 punti)** L'urna A contiene 3 palline bianche e 3 palline rosse. L'urna B contiene 6 palline verdi. Scegliamo un'urna a caso tra le due e estraiamo tre palline a caso senza rimpiazzo dall'urna scelta. Calcolare

   (a) La probabilità di ottenere tre palline dello stesso colore.

   (b) La probabilità di ottenere almeno 2 palline rosse.

   (c) La probabilità condizionata di avere scelto l'urna B sapendo che sono tutte dello stesso colore.

Soluzione: Sia E l'evento di avere scelto l'urna A. Quindi E^c rappresenta l'evento di avere scelto l'urna B, e $P(E) = P(E^c) = 1/2$.
Sia F l'evento che le tre palline estratte hanno lo stesso coloreAbbiamo

$$P(F|E) = \frac{2\binom{3}{3}\binom{3}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{10}, \qquad P(F|E^c) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{6}{3}} = 1.$$

Se G denota l'evento che tra le tre palline estratte si hanno almeno 2 palline rosse:

$$P(G|E) = \frac{\binom{3}{3}\binom{3}{0} + \binom{3}{2}\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{2}, \qquad P(G|E^c) = 0.$$

(a).

$$P(F) = P(F|E)P(E) + P(F|E^c)P(E^c) = \frac{1}{20} + \frac{1}{2} = \frac{11}{20}$$

(b).

$$P(G) = P(G|E)P(E) + P(G|E^c)P(E^c) = \frac{1}{4}$$

(c).

$$P(E^c|F) = P(F|E^c)\frac{P(E^c)}{P(F)} = \frac{10}{11}$$

Nome:____________________________________

2. **(7 punti)** Un indice finanziario segue un andamento aleatorio tale che ogni giorno, indipendentemente, il valore dell'indice

   - aumenta di 0.5 con probabilità $\frac{1}{2}$;
   - diminuisce di 0.2 con probabilità $\frac{1}{4}$;
   - diminuisce di 0.5 con probabilità $\frac{1}{4}$.

   Se il valore iniziale è 0, calcolare:

   (a) il valore atteso dell'indice dopo 20 giorni;

   (b) la probabilità di avere un valore pari a -0.2 dopo 3 tre giorni

Soluzione: Sia X il valore dell'indice dopo il primo giorno. Per ipotesi abbiamo $P(X = 0.5) = 1/2$, $P(X = -0.2) = 1/4$, $P(X = -0.5) = 1/4$. Pertanto si ha il valore atteso $E[X] = \frac{1}{2}(0.5) + \frac{1}{4}(-0.2 - 0.5) = \frac{3}{40}$. Dunque il valore atteso dopo 20 giorni vale

$$20 \times \frac{3}{40} = 1.5$$

Per la seconda domanda osserviamo che per arrivare a -0.2 in tre giorni necessariamente si deve avere (in un ordine arbitrario) un giorno da 0.5, un giorno da -0.2 e un giorno da -0.5. La probabilità di una fissata sequenza di giorni siffatti vale $\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{1}{32}$. Sommando sulle $3! = 6$ possibili sequenze si ha una probabilità pari a $\frac{6}{32} = \frac{3}{16}$.

Nome:______________________________________

3. **(8 punti)** Lanciamo due dadi. Calcolare

   (a) il valore atteso del massimo tra le due facce

   (b) il valore atteso del minimo tra le due facce

   (c) la probabilità condizionata che il massimo sia uguale a 6 sapendo che il minimo è uguale a 1.

Soluzione: Siano Z_1, Z_2 le due facce. Siano $X = \max\{Z_1, Z_2\}$ il massimo e $Y = \min\{Z_1, Z_2\}$ il minimo. Sono entrambe variabili aleatorie a valori in $\{1, \dots, 6\}$. Scriviamo $P(i, j) = P((Z_1, Z_2) = (i, j)) = \frac{1}{36}$ per la probabilità che il primo dado sia i e il secondo sia j. Per la X si ha la densità di probabilità p_X:

$$p_X(1) = P(1,1) = \frac{1}{36}\,, \;\; p_X(2) = P(1,2) + P(2,1) + P(2,2) = 2P(1,2) + P(2,2) = \frac{3}{36}\,,$$

$$p_X(3) = 2P(1,3) + 2P(2,3) + P(3,3) = \frac{5}{36}\,, \;\; p_X(4) = 2P(1,4) + 2P(2,4) + 2P(3,4) + P(4,4) = \frac{7}{36}\,,$$

$$p_X(5) = 2P(1,5) + 2P(2,5) + 2P(3,5) + 2P(4,5) + P(5,5) = \frac{9}{36}$$

$$p_X(6) = 2P(1,6) + 2P(2,6) + 2P(3,6) + 2P(4,6) + 2P(5,6) + P(6,6) = \frac{11}{36}$$

Il valore atteso di X è dato da

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \frac{1}{36}(1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66) = \frac{161}{36} \approx 4.47$$

Per la Y si ha la densità di probabilità p_Y:

$$p_Y(6) = P(6,6) = \frac{1}{36}\,, \;\; p_Y(5) = P(5,6) + P(6,5) + P(5,5) = \frac{3}{36}\,,$$

$$p_Y(4) = 2P(4,5) + 2P(4,6) + P(4,4) = \frac{5}{36}\,, \;\; p_Y(3) = 2P(3,4) + 2P(3,5) + 2P(3,6) + P(3,3) = \frac{7}{36}\,,$$

$$p_Y(2) = 2P(2,3) + 2P(2,4) + 2P(2,5) + 2P(2,6) + P(2,2) = \frac{9}{36}$$

$$p_Y(1) = 2P(1,2) + 2P(1,3) + 2P(1,4) + 2P(1,5) + 2P(1,6) + P(1,1) = \frac{11}{36}$$

Il valore atteso di Y è dato da

$$E[Y] = \sum_x x p_Y(x) = \frac{1}{36}(6 + 15 + 20 + 21 + 18 + 11) = \frac{91}{36} \approx 2.53$$

Osserviamo che la somma di massimo e minimo deve coincidere con la somma delle due facce: $X + Y = Z_1 + Z_2$. In effetti verifichiamo che $E[X + Y] = E[X] + E[Y] = (161 + 91)/36 = 7$ che è il valor medio della somma di due dadi.
Infine, la probabilità condizionata richiesta è

$$P(X = 6|Y = 1) = \frac{P(1,6) + P(6,1)}{p_Y(1)} = \frac{2}{11}$$

Nome:_______________________________________

4. **(7 punti)** A e B giocano a ping-pong. Supponiamo che in ogni partita indipendentemente dalle altre A vince con probabilità 1/3 e B vince con probabilità 2/3. Se ad A mancano 2 partite per vincere il torneo, mentre a B mancano 3 partite per vincere il torneo, dire qual'è la probabilità che sia A a vincere il torneo.

Soluzione: Avere una vittoria di A nel torneo è equivalente all'evento che nelle prossime 4 partite vi siano almeno 2 vittorie da parte di A. Quindi la probabilità richiesta vale

$$\binom{4}{2}(1/3)^2(2/3)^2 + \binom{4}{3}(1/3)^3(2/3)^1 + \binom{4}{4}(1/3)^4(2/3)^0 = 6\,\frac{4}{81} + 4\,\frac{2}{81} + \frac{1}{81} = \frac{33}{81}.$$

***

Per una soluzione alternativa si può ragionare come segue. Sia E l'evento di avere vittoria di A nel torneo. Possiamo scrivere E come

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$$

dove E_1 è l'evento di avere due vittorie di A nelle prime due partite; E_2 è l'evento di avere una vittoria di A e una vittoria di B nelle prime due partite e una vittoria di A nella terza; E_3 è l'evento di avere una vittoria di A e una vittoria di B nelle prime due partite, una vittoria di B nella terza e una vittoria di A nella quarta; E_4 è l'evento di avere due vittorie di B nelle prime due partite e due vittorie di A nella terza e quarta. Notiamo che $P(E_1) = 1/9$, $P(E_2) = 2(2/3)(1/3)^2 = 4/27$, $P(E_3) = 2(2/3)^2(1/3)^2 = 8/81$, $P(E_4) = (2/3)^2(1/3)^2 = 4/81$. Osserviamo che gli eventi E_1, E_2, E_3, E_4 sono disgiunti, e quindi vale

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) = \frac{33}{81}.$$

Nome:____

5. **(6 punti)** Un sistema è composto da n elementi indipendenti. Supponendo che ciascun elemento è funzionante con probabilità $\frac{1}{n}$, calcolare
   (a) il valore atteso e la varianza del numero di elementi funzionanti;
   (b) la probabilità che ci sia almeno un elemento funzionante, nel limite $n \to \infty$.

Soluzione: Sia X il numero di elementi funzionanti. Allora X è una v.a. binomiale di parametri n e $p = 1/n$. Pertanto $E[X] = np = 1$ e $\mathrm{Var}[X] = np(1-p) = (1 - \frac{1}{n})$.

La probabilità che ci sia almeno un elemento funzionante vale

$$1 - (1-p)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n .$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ha $1 - e^{-1}$.