Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2012-13, II semestre
23 maggio, 2013

CP110 Probabilità: Esonero 2

Testo e soluzione

Nome:____

1. **(7 punti)** Una scatola contiene 10 palline, 5 bianche e 5 nere. Ne vengono estratte 5, senza rimpiazzo. Sia X il numero di palline estratte di colore nero e sia Y il numero di palline estratte di colore bianco.

   (a) Calcolare la densità congiunta di (X, Y).

   (b) Calcolare la covarianza $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Soluzione: La densità congiunta di (X, Y) è data dalla matrice 6×6

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y)\,, \qquad x, y \in \{0, \dots, 5\}$$

Si ha $P(X = x, Y = y) = 0$ se $x + y \neq 5$. Se $x + y = 5$, abbiamo

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\binom{5}{x}\binom{5}{y}}{\binom{10}{5}}$$

Allora, si ottiene la matrice

$$p = \frac{1}{252}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per il calcolo di $\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$, osserviamo che $E[X] = E[Y] = 5/2$. Infatti

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=0}^{5} x p_X(x) = \sum_{x=0}^{5}\sum_{y=0}^{5} x p(x, y) \\ &= \frac{1}{252}(25 + 2 \times 100 + 3 \times 100 + 4 \times 25 + 5) = \frac{630}{252} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Inoltre

$$E[XY] = \sum_{x=0}^{5}\sum_{y=0}^{5} xyp(x, y) = \frac{1}{252}(4 \times 25 + 6 \times 100 + 6 \times 100 + 4 \times 25) = \frac{1400}{252} = \frac{50}{9}.$$

In conclusione

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{50}{9} - \frac{25}{4} = -\frac{25}{36}.$$

Nome:_______________________________________

2. **(8 punti)** Due motociclisti A, B corrono una gara che consiste in 4 giri di un circuito. Assumiamo che il tempo di percorrenza in minuti per un singolo giro del circuito è una variabile esponenziale di parametro $\lambda_A = 0.5$ per A, e $\lambda_B = 0.8$ per B. Supponiamo inoltre che si abbia indipendenza tra i diversi giri percorsi da uno stesso motociclista e che si abbia indipendenza tra i tempi dei due motociclisti. Calcolare

   (a) la durata media della gara di A;

   (b) la probabilità che A sia in vantaggio dopo il primo giro;

   (c) la probabilità che l'ultimo giro di A duri piú dell'intera gara di B.

Soluzione: Sia $X_A(i)$ il tempo di percorrenza dell'i-esimo giro per A, e sia $X_B(i)$ l'analogo per B. Siano inoltre Y_A, Y_B i tempi di gara totali associati, ossia

$$Y_A = \sum_{i=1}^{4} X_A(i)\,, \qquad Y_B = \sum_{i=1}^{4} X_B(i).$$

Per le ipotesi fatte si ha che Y_A è una variabile gamma di parametri 4 e λ_A, e Y_B è una variabile gamma di parametri 4 e λ_B. La durata media della gara di A è dunque $4/\lambda_A = 8$ minuti. La durata media della gara di B è $4/\lambda_B = 5$ minuti.
La prima domanda chiede di calcolare $P(X_A(1) < X_B(1))$. Per l'indipendenza si ha la densità congiunta

$$f_{X_A(1),X_B(1)}(x, y) = \lambda_A e^{-\lambda_A x} \lambda_B e^{-\lambda_B y} 1_{[0,\infty)}(x) 1_{[0,\infty)}(y).$$

Allora

$$\begin{aligned} P(X_A(1) < X_B(1)) &= \int_{\mathbb{R}^2} f_{X_A(1),X_B(1)}(x, y)\, 1_{x<y}\, dx\, dy \\ &= \int_0^\infty dx \lambda_A e^{-\lambda_A x} \int_x^\infty dy \lambda_B e^{-\lambda_B y} \\ &= \int_0^\infty dx \lambda_A e^{-\lambda_A x} e^{-\lambda_B x} = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{5}{13} \end{aligned}$$

L'ultima domanda chiede di calcolare $P(Y_B < X_A(4))$. Per l'indipendenza si ha la densità congiunta

$$f_{Y_B,X_A(4)}(x, y) = \frac{1}{\Gamma(4)}\, \lambda_B^4 x^3 e^{-\lambda_B x} \lambda_A e^{-\lambda_A y} 1_{[0,\infty)}(x) 1_{[0,\infty)}(y).$$

Allora

$$\begin{aligned} P(Y_B < X_A(4)) &= \int_{\mathbb{R}^2} f_{Y_B,X_A(4)}(x, y)\, 1_{x<y}\, dx\, dy \\ &= \int_0^\infty dx \frac{1}{\Gamma(4)}\, \lambda_B^4 x^3 e^{-\lambda_B x} \int_x^\infty dy \lambda_A e^{-\lambda_A y} \\ &= \int_0^\infty dx \frac{1}{\Gamma(4)}\, \lambda_B^4 x^3 e^{-\lambda_B x} e^{-\lambda_A x} = \frac{\lambda_B^4}{(\lambda_A + \lambda_B)^4} = (8/13)^4 \approx 0.143 \end{aligned}$$

Nome:______________________________________

3. **(6 punti)** Sia X un punto scelto uniformemente a caso nell'intervallo $[0, 1]$ e sia Y un punto scelto uniformemente a caso nell'intervallo $[0, 2]$.

   (a) Calcolare il valore atteso di $Y - X$.

   (b) Supponendo che X e Y sono indipendenti, calcolare la varianza di $Y - X$.

Soluzione: Si ha

$$E[Y - X] = E[Y] - E[X] = \frac{1}{2},$$

essendo $E[X] = \frac{1}{2}$ e $E[Y] = 1$. Per l'indipendenza si ha

$$\mathrm{Var}(Y - X) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(-X) = \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12},$$

dove abbiamo usato il fatto che la varianza di una somma di variabili indipendenti vale la somma delle varianze, e il fatto che $\mathrm{Var}[-X] = \mathrm{Var}[X] = 1/12$, e $\mathrm{Var}[Y] = 4\mathrm{Var}[X] = 4/12$.

Nome:______________________________________

4. **(8 punti)** Il telefono di Lucia riceve telefonate secondo un processo di Poisson, con una media di due telefonate al giorno. Sia $N(k)$ il numero di telefonate ricevute dopo k giorni.

   (a) Per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato, usando la disuguaglianza di Markov, si dia una stima della probabilità dell'evento $N(k) \geqslant 3k$.

   (b) Si stimi la stessa probabilità del punto (a) usando questa volta la disuguaglianza di Chebyshev.

   (c) Utilizzando il teorema del limite centrale, si calcoli il limite per $k \to \infty$ della probabilità dell'evento $N(k) \geqslant 2k + 3\sqrt{k}$, in termini della funzione $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz$.

Soluzione: Sappiamo che $N(k)$ è una variabile di Poisson di parametro $\lambda k = 2k$. Quindi $E[N(k)] = \mathrm{Var}[N(k)] = 2k$. Per la disuguaglianza di Markov abbiamo

$$P(N(k) \geqslant 3k) \leqslant \frac{E[N(k)]}{3k} = \frac{2k}{3k} = \frac{2}{3}.$$

Osserviamo che $N(k) \geqslant 3k$ equivale a $N(k) - E[N(k)] \geq k$, che implica $|N(k) - E[N(k)]| \geq k$. Se invochiamo la disuguaglianza di Chebyshev, si ha

$$P(N(k) \geqslant 3k) \leqslant P(|N(k) - E[N(k)]| \geq k) \leqslant \frac{\mathrm{Var}[N(k)]}{k^2} = \frac{2k}{k^2} = \frac{2}{k}.$$

Infine, sappiamo che $N(k)$ si può scrivere come somma di k variabili di Poisson indipendenti di parametro 2, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per il teorema del limite centrale si ha che la variabile

$$Z_k = \frac{N(k) - E[N(k)]}{\sqrt{\mathrm{Var}[N(k)]}} \,,$$

approssima una normale $N(0,1)$ nel limite $k \to \infty$. Allora, per $k \to \infty$,

$$P(N(k) \geqslant 2k + 3\sqrt{k}) = P\Big(Z_k \geqslant \frac{3\sqrt{k}}{\sqrt{\mathrm{Var}[N(k)]}}\Big) = P(Z_k \geqslant 3/\sqrt{2}) \to 1 - \Phi(3/\sqrt{2}) \approx 0.12.$$

Nome:____

5. **(8 punti)** Sia X la variabile aleatoria continua con densità

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

con $a > 0$ costante.

(a) Calcolare valore atteso e varianza di X

(b) Tre amici si danno appuntamento in piazza. Supponiamo che arrivino tra le 22:00 e le 23:00 a un orario aleatorio X_1, X_2, X_3 rispettivamente, dove le X_i sono indipendenti e hanno tutte la stessa distribuzione della variabile $22 + X$. Calcolare il valore atteso del tempo che passa tra l'arrivo del primo e l'arrivo dell'ultimo.

Soluzione: Sia X la variabile continua a valori nell'intervallo $[0,1]$ con densità $f(x) = -x + a$. La condizione

$$1 = \int_0^1 (-2x + a)dx = -1 + a$$

implica che $a = 2$. Si ha $E[X] = \int_0^1 x(-2x+2)dx = -\frac{2}{3}+1 = \frac{1}{3}$, e $E[X^2] = \int_0^1 x^2(-2x+2)dx = \frac{1}{6}$. Allora $\mathrm{Var}[X] = 1/18$.

Calcoliamo la denistà del minimo $W = \min\{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3\}$, dove $\bar{X}_i = X_i - 22$, cosi' che le $\bar{X}_i$ sono copie indipendenti della X. Si ha, per $t \in [0,1]$:

$$F_W(t) = P(W \leqslant t) = 1 - P(W > t) = 1 - P(X > t)^3.$$

D'altra parte per $t \in [0,1]$:

$$P(X > t) = \int_t^1 (-2x + 2)dx = -1 + t^2 + 2 - 2t = (1-t)^2.$$

Allora $F_W(t) = 1 - (1-t)^6$, e derivando si ha la densità

$$f_W(t) = 6(1-t)^5, \qquad t \in [0,1].$$

Allo stesso modo calcoliamo la denistà del massimo $Y = \max\{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3\}$. Usando

$$P(X \leqslant t) = 1 - P(X > t) = t(2-t),$$

si ha

$$F_Y(t) = P(Y \leqslant t) = P(X \leqslant t)^3 = [t(2-t)]^3.$$

Derivando si ha la densità

$$f_Y(t) = 6[t(2-t)]^2(1-t), \qquad t \in [0,1].$$

Il valore atteso richiesto, misurato in ore, vale:

$$E[Y - W] = E[Y] - E[W] = \int_0^1 t f_Y(t)dt - \int_0^1 t f_W(t)dt = \frac{19}{35} - \frac{1}{7} = \frac{2}{5},$$

dove abbiamo calcolato gli integrali

$$\int_0^1 t f_W(t)dt = 6\int_0^1 t(1-t)^5 dt = \frac{1}{7},$$

$$\int_0^1 t f_Y(t)dt = 6\int_0^1 t^3(2-t)^2(1-t)dt = 19/35.$$