Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2009-2010, II semestre
3 giugno, 2010

CP110 Probabilità: Esame del 3 giugno 2010

Testo e soluzione

1. **(6 pt)** Una scatola contiene 100 dadi, 30 dei quali hanno un difetto: la faccia numero 2 ha probabilità 1/9 mentre la faccia numero 5 ha probabilità 2/9 (tutte le altre facce hanno probabilità 1/6). Un dado preso a caso dalla scatola viene lanciato ripetutamente. Sapendo che il primo 2 appare al secondo lancio, calcolare la probabilità che il dado sia difettoso.

Soluzione. Sia A l'evento che il dato scelto sia difettoso. Sia X il numero di lanci per avere il primo 2. Condizionatamente a A, X è una geometrica di parametro $p = 1/9$. Condizionatamente a A^c, X è una geometrica di parametro $p = 1/6$. Il testo richiede di calcolare

$$P(A|X=2) = \frac{P(X=2|A)\,P(A)}{P(X=2)} = \frac{(1-1/9)(1/9)(3/10)}{P(X=2)}\,,$$

dove abbiamo usato il fatto che $P(A) = 3/10$. Resta da calcolare

$$P(X=2) = P(X=2|A)P(A) + P(X=2|A^c)P(A^c) = (1-1/9)(1/9)(3/10) + (1-1/6)(1/6)(7/10)\,.$$

In conclusione

$$P(A|X=2) = \frac{4/135}{4/135 + 35/360}\,.$$

2. **(6 pt)** Il tempo di vita di un dispositivo elettronico è una variabile esponenziale di parametro 1. Si considerino ora n dispositivi indipendenti e sia M_n il primo tempo in cui non si ha piú alcun dispositivo funzionante.

   1) Calcolare la funzione di distribuzione di M_n.

   2) Calcolare $P(M_n > \log n)$ nel limite $n \to \infty$.

Soluzione. Siano $X_1, .., X_n$ variabili esponenziali di parametro 1 indipendenti. Si ha $M_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i$. Per $t \geq 0$ la funzione di distribuzione di M_n è data da $F_n(t) = P(M_n \leq t)$. L'evento $M_n \leq t$ equivale a $X_i \leq t$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Per l'indipendenza si ha

$$F_n(t) = P(X_1 \leq t)^n = (1 - e^{-t})^n \,.$$

Allora, $P(M_n > \log n) = 1 - (1 - n^{-1})^n \to 1 - e^{-1}$.

3. **(6 pt)** Siano X, Y, Z tre variabili di Poisson indipendenti di parametri $1, 2, 3$ rispettivamente. Calcolare

   1) $P(X + Y + Z = 6)$
   2) $\mathrm{Cov}(X + 2Y, 2Y + 3Z)$
   3) $E[XYZ]$
   4) $E[X^2Y^2Z]$

Soluzione. Sappiamo che $X+Y+Z$ è Poisson(λ) con $\lambda = 1+2+3 = 6$. Quindi $P(X+Y+Z = 6) = e^{-6}(6^6)/6!$.
Inoltre

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X + 2Y, 2Y + 3Z) &= \mathrm{Cov}(X, 2Y) + \mathrm{Cov}(X, 3Z) + \mathrm{Cov}(2Y, 2Y) + \mathrm{Cov}(2Y, 3Z)\\ &= \mathrm{Cov}(2Y, 2Y) = \mathrm{Var}(2Y) = 4\mathrm{Var}(Y) = 8\end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'indipendenza per annullare tutte le covarianze miste.
Infine, $E[XYZ] = E[X]E[Y]EZ] = 6$, e $E[X^2Y^2Z] = E[X^2]E[Y^2]E[Z] = (1 + 1)(2 + 4)3 = 36$.

4. **(6 pt)** Si consideri la catena di Markov $X_0, X_1, X_2, \ldots$, con spazio degli stati $\{-1, 0, 1\}$ e matrice di transizione P_{ij}, $i, j = -1, 0, 1$, tale che $P_{-1,0} = P_{1,0} = \frac{1}{4}$, $P_{-1,1} = P_{1,-1} = 0$, $P_{0,1} = P_{0,-1} = 1/2$. Dimostrare che la catena è ergodica e determinare la sua misura invariante.

   Sapendo che $X_0 = 0$, calcolare

   1) la distribuzione di X_2

   2) la varianza di X_n nel limite $n \to \infty$

Soluzione. La matrice P deve soddisfare $\sum_j P_{ij} = 1$ e quindi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente che P^2 è una matrice con elementi positivi. In effetti, si ha $(P^2)_{i,j} \geq \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ per ogni $i, j \in \{-1, 0, 1\}$. Quindi la catena è ergodica.
La misura invariante $\pi = (\pi_{-1}, \pi_0, \pi_1)$ deve soddisfare $\pi_i > 0$, $\sum_i \pi_i = 1$, e

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \, .$$

Ne segue che $\pi_0 = \frac{1}{4}\pi_{-1} + \frac{1}{4}\pi_1$, e $\pi_{\pm 1} = \frac{3}{4}\pi_{\pm}1 + \frac{1}{2}\pi_0$. quindi $\pi = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$.
Se $X_0 = 0$ allora $X_1 = \pm 1$ con prob. $1/2$, e quindi $X_2 = \pm 1$ con prob. $1/2 \times 3/4 = 3/8$, e $X_2 = 0$ con prob. $1 - 6/8 = 1/4$. La distribuzione della variabile X_n è simmetrica intorno a 0 e quindi si ha $E[X_n] = 0$ per ogni n fissato.
Inoltre per n grande, X_n è approssimativamente distribuita come π per il teorema ergodico. Pertanto $\mathrm{Var}[X_n] \to \mathrm{Var}[X] = E[X^2]$ dove $X \in \{-1, 0, 1\}$ ha distribuzione π. Si ha $E[X^2] = P[X \neq 0] = \pi_{-1} + \pi_1 = 4/5$.

5. **(6 pt)** Per motivi di sicurezza il personale di bordo sequestra temporaneamente il telefono cellulare a ciascuno dei 200 passeggeri di un volo di linea. Arrivati a destinazione, i telefoni vengono restituiti ai passeggeri in maniera completamente aleatoria. Calcolare il valore atteso e la varianza del numero di passeggeri a cui viene restituito il proprio telefono.

Soluzione. Sia $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ una permutazione aleatoria degli interi $1, \ldots, n$, e diciamo che si ha un accoppiamento in i se $\sigma_i = i$. Qui $n = 200$. Supponendo che tutte le permutazioni siano equiprobabili, calcoliamo il valore atteso e la varianza del numero $\mathcal{N}$ di accoppiamenti $\sigma_i = i$. Scriviamo $\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$, dove A_i è l'evento $\{\sigma_i = i\}$. Si ha $P(A_i) = E[1_{A_i}] = 1/n$, e quindi $E[\mathcal{N}] = \sum_{i=1}^{n} E[1_{A_i}] = 1$.
Inoltre,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\mathcal{N}] &= \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{Cov}(1_{A_i}, 1_{A_j}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)(1 - P(A_i)) + 2\sum_{i<j}[P(A_i \cap A_j) - P(A_i)P(A_j)] \\
&= \frac{n-1}{n} + n(n-1)[P(A_1 \cap A_2) - 1/n^2]\,.
\end{aligned}$$

Per calcolare $P(A_1 \cap A_2)$ osserviamo che si hanno $(n-2)!$ permutazioni tali che $\sigma_1 = 1$ and $\sigma_2 = 2$ e quindi $P(A_1 \cap A_2) = (n-2)!/n! = 1/[n(n-1)]$. In conclusione,

$$\mathrm{Var}[\mathcal{N}] = 1\,.$$

6. **(6 pt)** Siano X, Y due variabili aleatorie continue con densità congiunta

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\Big(- x^2 + xy - \frac{1}{2}\, y^2 \Big) , \qquad x, y \in (-\infty, +\infty) .$$

1) Calcolare le densità marginali di X e Y e i loro valori attesi.

2) Dire se X, Y sono indipendenti

Soluzione. Per X si ha

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\Big(- x^2 + xy - \frac{1}{2}\, y^2 \Big)\, dy = \frac{1}{2\pi} \exp\Big(- \frac{1}{2}\, x^2 \Big) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(- \frac{1}{2}\, (y-x)^2 \Big)\, dy .$$

Usando il fatto che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(- \frac{1}{2}\, (y-x)^2 \Big)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(- \frac{1}{2}\, y^2 \Big)\, dy = \sqrt{2\pi}\, ,$$

si ha $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(- \frac{1}{2}\, x^2 \Big)$. Quindi X è una normale standard. In particolare $E[X] = 0$.

Per Y si ha

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\Big(- x^2 + xy - \frac{1}{2}\, y^2 \Big)\, dx = \frac{1}{2\pi} \exp\Big(- \frac{1}{4}\, y^2 \Big) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(- \ (x - y/2)^2 \Big)\, dx .$$

Usando il fatto che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(- (x - y/2)^2 \Big)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(- x^2 \Big)\, dx = \sqrt{\pi}\, ,$$

si ha $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\Big(- \frac{1}{4}\, y^2 \Big)$. Quindi Y è una normale di media 0 e varianza $\sigma^2 = 2$. In particolare $E[Y] = 0$.

Le variabili non sono indipendenti poiché $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$.