Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2016-17, II semestre
20 giugno, 2017

CP110 Probabilità: esame del 20 giugno 2017

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si puo' usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con cinque esercizi risolti correttamente si arriva al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome:______________________________________

1. Per un dato $n \in \mathbb{N}$, le variabili aleatorie discrete X, Y hanno densità di probabilità congiunta

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2^x n}\binom{x}{y} & \text{se } x \in \{1,\dots,n\} \text{ e } y \in \{0,\dots,x\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare:

(a) il valore atteso $E[X]$;

(b) il valore atteso $E[Y]$;

(c) la probabilità dell'evento $X = Y$.

Soluzione: Notiamo che si tratta di una probabilità:

$$\sum_{x,y} p(x,y) = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{2^x n} \sum_{y=0}^{x} \binom{x}{y} = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

Per $E[X]$ abbiamo

$$E[X] = \sum_{x,y} x p(x,y) = \sum_{x=1}^{n} \frac{x}{2^x n} \sum_{y=0}^{x} \binom{x}{y} = \sum_{x=1}^{n} \frac{x}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

Per $E[Y]$ abbiamo

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{x,y} y p(x,y) = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{2^x n} \sum_{y=0}^{x} y \binom{x}{y} = \sum_{x=1}^{n} \frac{x}{2n} = \frac{n+1}{4}.$$

Per l'evento $X = Y$ abbiamo

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} P(X = Y = k) = \sum_{k=1}^{n} p(k,k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k n} = \frac{1}{n}(1 - 2^{-n}).$$

Nome:____

2. Al tempo zero un'urna contiene 1 pallina rossa e 1 pallina nera. A ogni unità di tempo, una pallina viene estratta a caso, e viene rimessa nell'urna, insieme a una nuova pallina dello stesso colore di quella estratta. Sia X_k il numero di palline nere al tempo k (di modo che $X_0 = 1, X_1 \in \{1, 2\}, X_2 \in \{1, 2, 3\}, ...$).

   (a) Calcolare la probabilità dell'evento $X_k = m + 1$ sapendo che $X_{k-1} = m$, per ogni $m, k = 1, 2, \ldots$

   (b) Calcolare il valore atteso di X_k sapendo che che $X_{k-1} = m$, per ogni $m, k = 1, 2, \ldots$

   (c) Osservare che per simmetria si deve avere $E[X_k] = \frac{k+2}{2}$ per ogni $k = 0, 1, 2, \ldots$, e dimostrare questa formula usando il punto (b) e l'induzione su k.

Soluzione: (a). Notiamo che al tempo $k-1$ ci sono in totale $k+1$ palline poiché a ogni unità di tempo viene aggiunta una pallina e al tempo zero si hanno 2 palline. Se al tempo $k-1$ ci sono m palline nere allora la probabilità di aggiungere una pallina nera è la probabilità di estrarre una pallina nera, che vale $m/(k+1)$, ossia

$$P(X_k = m + 1 \,|\, X_{k-1} = m) = \frac{m}{k+1}.$$

(b). Passando al complementare si ha

$$P(X_k = m \,|\, X_{k-1} = m) = 1 - \frac{m}{k+1}.$$

Allora il valore atteso di X_k, sapendo che $X_{k-1} = m$ è

$$E[X_k \,|\, X_{k-1} = m] = (m+1)\frac{m}{k+1} + m\left(1 - \frac{m}{k+1}\right) = m\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = m\,\frac{k+2}{k+1}.$$

(c). Notiamo che $E[X_k] = \frac{k+2}{2}$ è la formula che ci aspettiamo per simmetria. Infatti se Y_k è il numero di palline rosse, allora sappiamo che $X_k + Y_k = k + 2$ e per simmetria $E[X_k] = E[Y_k] = \frac{1}{2}E[X_k + Y_k] = \frac{k+2}{2}$.
Per la dimostrazione richiesta osserviamo che

$$\begin{aligned} E[X_k] &= \sum_{m=1}^{k+1} P(X_{k-1} = m) E[X_k \,|\, X_{k-1} = m] \\ &= \sum_{m=1}^{k+1} P(X_{k-1} = m) m\,\frac{k+2}{k+1} = E[X_{k-1}]\,\frac{k+2}{k+1}. \end{aligned}$$

Poiché $X_0 = 1$, la forumla $E[X_j] = \frac{j+2}{2}$ vale certamente per $j = 0$. Fissiamo $k \in \mathbb{N}$. Supponiamo che sia valida per ogni $j \leqslant k-1$, e mostriamo che deve valere anche per $j = k$. Allora

$$E[X_k] = E[X_{k-1}]\,\frac{k+2}{k+1} = \frac{k+1}{2}\,\frac{k+2}{k+1} = \frac{k+2}{2},$$

che completa la dimostrazione.

Nome:______________________________________

3. Sia Q un punto del piano scelto uniformemente a caso nel disco unitario

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

(a) Calcolare il valore atteso e la varianza della distanza di Q dall'origine.

(b) Cosa cambia se passiamo dal piano allo spazio tridimensionale (con U sostituito dalla sfera di raggio uno) ?

Soluzione: Sia D la distanza di Q dall'origine. Calcoliamo la funzione di distribuzione di D:

$$F(t) = P(D \leqslant t) = \frac{\text{Area}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant t\})}{\text{Area}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\})} = \frac{\pi t^2}{\pi} = t^2\,, \qquad t \in [0,1].$$

Derivando si vede che D ha densità di probabilità $f(t) = 2t\mathbf{1}_{[0,1]}$. Allora il valor medio vale

$$E[D] = \int_0^1 2t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Inoltre

$$E[D^2] = \int_0^1 2t^3 dt = \frac{1}{2}.$$

Allora

$$\text{Var}(D) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Se siamo in tre dimensioni l'area è sostituita dal volume e abbiamo

$$F(t) = P(D \leqslant t) = \frac{\frac{4}{3}\pi t^3}{\frac{4}{3}\pi} = t^3\,, \qquad t \in [0,1].$$

Derivando si ha $f(t) = 3t^2\mathbf{1}_{[0,1]}$ e dunque

$$E[D] = \int_0^1 3t^3 dt = \frac{3}{4}, \quad E[D^2] = \int_0^1 3t^4 dt = \frac{3}{5}, \quad \text{Var}(D) = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

Nome:______________________________________

4. Sia X la variabile aleatoria continua con densità di probabilità

$$f(x) = c\,x^2 \mathbf{1}_{[0,2]}(x)$$

Calcolare:

(a) Il valore di c.

(b) La media e la varianza di X.

(c) La densità di probabilità della variabile $Y = X^3$.

Soluzione: Per il calcolo di c osserviamo che

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c\int_0^2 x^2 dx = c\,\frac{8}{3} \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{3}{8}$$

La media e la varianza valgono

$$E[X] = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{2},$$

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{3}{8}\int_0^2 x^4 dx - \frac{9}{4} = \frac{3}{20}$$

La variabile $Y = X^3$ ha funzione di distribuzione

$$F_Y(t) = P(X^3 \leqslant t) = P(X \leqslant t^{1/3}).$$

Se $t \in [0,8]$ si ha

$$F_Y(t) = \frac{3}{8}\int_0^{t^{1/3}} x^2 dx = \frac{t}{8}.$$

Se $t > 8$ si ha $F_Y(t) = 1$ essendo $X \in [0,2]$. Inoltre se $t < 0$ si ha $F_Y(t) = 0$. Allora, la densità di probabilità della variabile $Y = X^3$ è

$$f_Y(y) = \frac{1}{8}\,\mathbf{1}_{[0,8]}(y),$$

ossia Y è uniforme in $[0,8]$.

Nome:____

5. Una moneta viene lanciata ripetutamente. Consideriamo gli eventi

$$E_1 = \{\text{almeno 55 teste nei primi 100 lanci}\}$$
$$E_2 = \{\text{almeno 220 teste nei primi 400 lanci}\}$$
$$E_3 = \{\text{almeno 830 teste nei primi 1600 lanci}\}$$

Utilizzando l'approssiamzione normale, ordinare gli eventi precedenti secondo le loro probabilità.

Soluzione: Sia X_k il numero di teste nei primi k lanci. Allora X_k è una binomiale di parametri $k, \frac{1}{2}$. Per l'approssimazione normale sappiamo che la variabile

$$Z_k = \frac{X_k - \frac{k}{2}}{\sqrt{k/4}}$$

soddisfa (per k grande)

$$P(Z_k \geqslant t) \approx 1 - \Phi(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

D'altra parte, se $k = 100, 400, 1600$, si ha

$$E_1 = \{Z_{100} \geqslant 1\}\,, \qquad E_2 = \{Z_{400} \geqslant 2\} \qquad E_3 = \{Z_{1600} \geqslant 1.5\}$$

Essendo Φ monotona crescente si ha $\Phi(1) < \Phi(\frac{3}{2}) < \Phi(2)$ e dunque

$$P(E_1) > P(E_3) > P(E_2)$$

Nome:____

6. In una chat di gruppo i messaggi arrivano seguendo la distribuzione di un processo di Poisson con una media di 9 messaggi all'ora. I messaggi possono essere di tre tipi indipendentemente l'uno dall'altro e con uguali probabilità: testo, immagine oppure vocale. Calcolare:

   (a) Il valore atteso del numero di messaggi vocali ricevuti in due ore.

   (b) Il valore atteso del numero di immagini ricevute in tre ore.

   (c) La probabilità che in un intervallo di tempo di 20 minuti non si riceva alcuna immagine.

Soluzione: Il numero medio di messaggi in due ore è 18, e poiché ogni messaggio ha probabilità $1/3$ di essere vocale abbiamo che il numero medio di messaggi vocali in due ore è $18/3 = 6$. In maniera simile otteniamo che il numero medio di immagini in tre ore è $27/3 = 9$.

Sia X il numero di messaggi ricevuti nell'intervallo di 20 minuti in considerazione. Allora X è una variabile di Poisson di parametro $\mu = 9/3 = 3$. Sia Y il numero di immagini nello stesso intervallo di tempo. Poiché ogni messaggio ha indipendentemente dagli altri probabilità $1/3$ di essere un'immagine, se condizioniamo all'evento $X = k$, allora Y è una binomiale di parametri $k, \frac{1}{3}$. Allora,

$$\begin{aligned}P(Y=0) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)P(Y=0 \mid X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} P(Y=0 \mid X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} e^{-3} = e^2 e^{-3} = e^{-1}.\end{aligned}$$

Osservazione: ragionando come sopra si può inoltre mostrare che per ogni $j \in \mathbb{Z}_+$:

$$P(Y=j) = \sum_{k=j}^{\infty} P(X=k)P(Y=j \mid X=k) = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^j \left(\frac{2}{3}\right)^{k-j} = e^{-1} \frac{1}{j!},$$

ossia che Y è una variabile di Poisson di parametro 1.