Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2018-19, II semestre
13 giugno, 2019

CP210 Introduzione alla Probabilità: Esame 1

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si può usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	7	7	7	7	7	7	42

Nome:______________________________________

1. **(7 punti)** In un certo esperimento aleatorio abbiamo tre eventi A, B, C tali che

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.$$

Calcolare la probabilità che si realizzino

(a) esattamente 2 degli eventi A, B, C ;

(b) esattamente 1 degli eventi A, B, C ;

(c) nessuno degli eventi A, B, C.

Soluzione:

a). L'evento richiesto, chiamiamolo E, si può scrivere

$$E = (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c).$$

Dunque E è l'unione di tre eventi disgiunti e abbiamo

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c).$$

Inoltre $A^c \cap B \cap C = (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$ e dunque

$$\mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}.$$

Allo stesso modo $\mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$ e $\mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) = \frac{1}{4}$. Allora $\mathbb{P}(E) = 3/4$.

b). Sia F l'evento richiesto. Possiamo scrivere F come unione disgiunta:

$$F = (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c).$$

Allora ragionando come sopra si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C) &= \mathbb{P}(A^c \cap C) - \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C)\\ &= \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.\end{aligned}$$

Allo stesso modo per $A \cap B^c \cap C^c$ e $A^c \cap B \cap C^c$. Allora

$$P(F) = 0.$$

c). Chiamiamo $G = A^c \cap B^c \cap C^c$ l'evento richiesto. Allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}(A^c \cap B^c) - \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C)\\ &= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) - 0 = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Nome:____

2. **(7 punti)** Sia S_n la posizione dopo n passi della passeggiata aleatoria con incrementi indipendenti ± 1 con probabilità $1/2, 1/2$, con punto di partenza $S_0 = 0$. Sia inoltre Y_n la stessa quantità ottenuta sostituendo gli incrementi con la variabile che vale ± 1 con probabilità $1/4, 1/4$ e vale 0 con probabilità $1/2$. Infine, sia W_n la stessa quantità ottenuta sostituendo gli incrementi con la variabile che vale ± 2 con probabilità $1/4, 1/4$ e vale 0 con probabilità $1/2$.

   (a) Calcolare il valore atteso e la varianza di S_n, Y_n, W_n.

   (b) Dimostrare che per ogni $t > 0$, per n grandi si deve avere:

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant t\sqrt{n}) \;\geqslant\; \mathbb{P}(S_n \leqslant t\sqrt{n}) \;\geqslant\; \mathbb{P}(W_n \leqslant t\sqrt{n}).$$

Soluzione:

a). Scriviamo

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\,, \qquad Y_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i\,, \qquad W_n = \sum_{i=1}^{n} R_i\,,$$

dove: X_i sono indipendenti tali che $X_i = \pm 1$ con probabilità $1/2, 1/2$; Z_i sono indipendenti tali che $Z_i = \pm 1$ con probabilità $1/4, 1/4$ e $Z_i = 0$ con probabilità $1/2$; R_i sono indipendenti tali che $R_i = \pm 2$ con probabilità $1/4, 1/4$ e $R_i = 0$ con probabilità $1/2$; La media di S_n, Y_n, W_n è zero poiché gli incrementi sono centrati. La varianza, per l'indipendenza, vale:

$$\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = n\,, \quad \mathrm{Var}(Y_n) = n\mathrm{Var}(Z_1) = n/2\,, \quad \mathrm{Var}(W_n) = n\mathrm{Var}(R_1) = 2n\,,$$

dove usiamo il fatto che $\mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] = 1$, $\mathrm{Var}(Z_1) = \mathbb{E}[Z_1^2] = 1/2$ e $\mathrm{Var}(R_1) = \mathbb{E}[R_1^2] = 2$.

b). Per il teorema del limite centrale abbiamo che le seguenti variabili sono approssimate da una normale standard: $S_n/\sqrt{n}$, $Y_n/\sqrt{\frac{n}{2}}$, e $W_n/\sqrt{2n}$. Allora per n grandi

$$\begin{gathered}
\mathbb{P}(Y_n \leqslant t\sqrt{n}) = \mathbb{P}(Y_n/\sqrt{n/2} \leqslant t\sqrt{2}) \approx \Phi(t\sqrt{2})\,, \\
\mathbb{P}(S_n \leqslant t\sqrt{n}) = \mathbb{P}(S_n/\sqrt{n} \leqslant t) \approx \Phi(t)\,, \\
\mathbb{P}(W_n \leqslant t\sqrt{n}) = \mathbb{P}(W_n/\sqrt{2n} \leqslant t/\sqrt{2}) \approx \Phi(t/\sqrt{2}),
\end{gathered}$$

dove $\Phi(s) = \int_{-\infty}^{s} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du$. Per la monotonia di $\Phi(s)$ abbiamo

$$\Phi(t\sqrt{2}) \geqslant \Phi(t) \geqslant \Phi(t/\sqrt{2}),$$

che implica le disuguaglianze richieste.

Nome:____

3. **(7 punti)** Siano X_1, X_2, X_3 tre variabili esponenziali di parametro 1 indipendenti. Sia $Y = X_1 + X_2$ e sia

$$Z = \begin{cases} X_2 & \text{se } X_1 > 1 \\ X_2 + X_3 & \text{se } X_1 \leqslant 1 \end{cases}$$

Calcolare:

(a) la densità di probabilità di Y;

(b) la probabilità dell'evento $\{Z > 1\}$

(c) la probabilità dell'evento $\{Y > Z\}$

Soluzione:

a). Y è somma di due esponenziali di parametro 1 indipendenti, e dunque ha la densità di una gamma di parametri 2 e 1, ossia:

$$f_Y(y) = ye^{-y}\,\mathbf{1}(y \geqslant 0).$$

b). Abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z > 1) &= \mathbb{P}(Z > 1 | X_1 > 1)\mathbb{P}(X_1 > 1) + \mathbb{P}(Z > 1 | X_1 \leqslant 1)\mathbb{P}(X_1 \leqslant 1) \\
&= \mathbb{P}(X_2 > 1 | X_1 > 1)\mathbb{P}(X_1 > 1) + \mathbb{P}(X_2 + X_3 > 1 | X_1 \leqslant 1)\mathbb{P}(X_1 \leqslant 1) \\
&= \mathbb{P}(X_2 > 1)\mathbb{P}(X_1 > 1) + \mathbb{P}(X_2 + X_3 > 1)\mathbb{P}(X_1 \leqslant 1) \\
&= e^{-1}e^{-1} + 2e^{-1}(1 - e^{-1}) \\
&= 2e^{-1} - e^{-2},
\end{aligned}$$

dove la terza uguaglianza segue dall'indipendenza mentre la quarta uguaglianza segue dal fatto che

$$\mathbb{P}(X_2 > 1) = \mathbb{P}(X_1 > 1) = \int_1^\infty e^{-y} dy = e^{-1}, \qquad \mathbb{P}(X_2 + X_3 > 1) = \int_1^\infty ye^{-y} dy = 2e^{-1}.$$

c). Notiamo che

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y > Z) &= \mathbb{P}(X_1 + X_2 > X_2 | X_1 > 1)\mathbb{P}(X_1 > 1) + \mathbb{P}(X_1 + X_2 > X_2 + X_3 | X_1 \leqslant 1)\mathbb{P}(X_1 \leqslant 1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 > 0 | X_1 > 1)\mathbb{P}(X_1 > 1) + \mathbb{P}(X_1 > X_3 | X_1 \leqslant 1)\mathbb{P}(X_1 \leqslant 1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 > 1) + \mathbb{P}(1 \geqslant X_1 > X_3)
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(1 \geqslant X_1 > X_3) &= \int_0^1 dx_1 e^{-x_1} \int_0^{x_1} e^{-x_3} dx_3 = \int_0^1 dx_1 e^{-x_1}(1 - e^{-x_1}) \\
&= 1 - e^{-1} - \frac{1}{2}(1 - e^{-2}) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2}) - e^{-1}
\end{aligned}$$

In conclusione

$$\mathbb{P}(Y > Z) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2}).$$

Nome:______________________________________

4. **(7 punti)** Ad una fermata dell'autobus, il bus A e il bus B arrivano secondo due processi di Poisson indipendenti di parametro $\lambda_A = 1$ e $\lambda_B = 2$ rispettivamente, dove le unità di misura sono tali che ogni 20 minuti si ha in media un bus della linea A. Sia N_A il numero di bus della linea A che passano alla fermata tra le ore 9:00 e le ore 9:40, e sia N_B il numero di bus della linea B che passano alla fermata tra le ore 9:20 e le ore 10:00. Calcolare:

   (a) i valori attesi $\mathbb{E}[N_A]$ e $\mathbb{E}[N_B]$;

   (b) le varianze $\mathrm{Var}(N_A)$ e $\mathrm{Var}(N_B)$;

   (c) la probabilità dell'evento $\{N_A + N_B = 3\}$.

Soluzione: (a). Se la linea A ha una media di 1 ogni 20 minuti allora su 40 minuti si ha una media di 2 passaggi, e dunque N_A è una Poisson di parametro $\mu_A = 2$. Poiché $\lambda_B = 2\lambda_A$ si deve avere che N_B è una Poisson di parametro $\mu_B = 2\mu_A = 4$. Allora

$$\mathbb{E}[N_A] = \mu_A = 2\,, \qquad \mathbb{E}[N_B] = \mu_B = 4\,.$$

(b). Inoltre per le note proprietà delle v.a. di Poisson si ha

$$\mathrm{Var}(N_A) = \mu_A = 2\,, \qquad \mathrm{Var}(N_B) = \mu_B = 4.$$

(c). Per l'indipendenza di N_A e N_B sappiamo che $N_A + N_B$ è una Poisson di parametro $\mu_A + \mu_B = 6$. Allora

$$\mathbb{P}(N_A + N_B = 3) = \frac{6^3}{3!}e^{-6} = 36e^{-6}.$$

Nome:____

5. **(7 punti)** In una scatola ci sono 3 palline segnate con le cifre $-1, 0, +1$ rispettivamente. Sia X il risultato della prima estrazione e sia Y il risultato della seconda estrazione senza rimpiazzo.

   (a) Scrivere la densità di probabilità congiunta per la coppia (X, Y)

   (b) Calcolare $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$.

   (c) Scrivere la densità di probabilità della variabile $Z = X + Y$.

Soluzione: (a). La coppia (X, Y) può assumere i valori (x, y), per ogni $x, y \in \{-1, 0, +1\}$. Abbiamo la tabella $p_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$:

$x \setminus y$	-1	0	+1
-1	0	1/6	1/6
0	1/6	0	1/6
+1	1/6	1/6	0

(b). Le marginali sono $p_X(-1) = p_X(0) = p_X(+1) = 1/3$ e $p_Y(-1) = p_Y(0) = p_Y(+1) = 1/3$. Allora $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$ e la varianza vale

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[Y] = \mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{3}.$$

(c). Notiamo che $Z = X + Y \in \{-1, 0, +1\}$, infatti $Z = \pm 2$ ha probabilità zero. Inoltre :

$$\mathbb{P}(Z = -1) = p_{X,Y}(-1, 0) + p_{X,Y}(0, -1) = \frac{1}{3},$$
$$\mathbb{P}(Z = +1) = p_{X,Y}(+1, 0) + p_{X,Y}(0, +1) = \frac{1}{3},$$
$$\mathbb{P}(Z = 0) = p_{X,Y}(+1, -1) + p_{X,Y}(-1, +1) = \frac{1}{3}.$$

Nome:____

6. **(7 punti)** Due dadi vengono lanciati ripetutamente fino a che la loro somma è uguale a 7.

   (a) Qual è il numero medio di lanci effettuati?

   (b) Qual è la probabilità di ottenere la coppia $(3,3)$ in almeno uno di questi lanci ?

Soluzione: (a). Sia T il numero di lanci effettuati. Allora T è una geometrica di parametro $1/6$ (la probabilità che la somma di due dai sia uguale a 7). In particolare

$$\mathbb{E}[T] = 6.$$

(b). Sia S is primo tempo in cui appare la coppia $(3,3)$ se lanciamo due dadi ripetutamente. L'evento in questione si può scrivere come $\{T > S\}$ oppure $\min\{S,T\} = S$. Allora

$$\mathbb{P}(\{T > S\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{T > S\} \cap \{S = k\}).$$

L'evento $\{T > S\} \cap \{S = k\}$ equivale a "nessuna tra le coppie $(3,3), (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$ per i primi $k-1$ lanci e $(3,3)$ al k-esimo lancio" dunque si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\{T > S\} \cap \{S = k\}) = (1 - \tfrac{7}{36})^{k-1}\, \tfrac{1}{36}.$$

In conclusione, calcolando la somma:

$$\mathbb{P}(\{T > S\}) = \frac{1}{7}.$$

Una soluzione alternativa: Sia Z il numero di coppie $(3,3)$ ottenute entro il tempo T. Allora la probabilità richiesta vale

$$\mathbb{P}(Z \geqslant 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant 1 | T = k)\mathbb{P}(T = k)$$

Ora $\mathbb{P}(T = k) = (1/6)(5/6)^{k-1}$. Per calcolare $\mathbb{P}(Z \geqslant 1 | T = k)$ possiamo ragionare come segue: condizionato a $T = k$ sappiamo che nei primi $k-1$ lanci si hanno tutte le coppie tranne quelle che danno somma 7, e tutte hanno uguale probabilità. Le coppie ammissibili sono 30, mentre una solo di queste è la $(3,3)$. Dunque, condizionata a $T = k$, la Z è una binomiale di parametri $k-1$ e $1/30$. Allora

$$\mathbb{P}(Z \geqslant 1 | T = k) = 1 - (29/30)^{k-1}.$$

Pertanto:

$$\mathbb{P}(Z \geqslant 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (29/30)^{k-1})(1/6)(5/6)^{k-1} = 1 - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} (29/36)^{k-1} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}.$$

Nome:____