Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2019-20, II semestre
8 giugno, 2020

CP210 Introduzione alla Probabilità: Esame 1

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Codice etico: Durante la prova d'esame la studentessa/lo studente:

1. non si avvale di alcun ausilio o supporto esterno, cartaceo o elettronico (es.: manuali, dispense, fogli propri, libri, pubblicazioni, telefoni cellulari, computer o altri dispositivi elettronici) che non siano penna e fogli o tablet per scrivere;
2. non copia né osserva le prove di altri candidati;
3. non contatta o tenta di contattare in alcun modo altre persone.

Firma

....

Modalità di esame:

1. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
2. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
3. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che con cinque esercizi risolti correttamente si arriva al trenta.
4. Al termine della prova, consegna il compito facendo un upload sulla piattaforma come indicato dal docente.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome:____

1. **(6 punti)** Lanciamo quattro monete eque. Calcolare:
   (a) la probabilità di esattamente 2 teste nelle quattro monete;
   (b) la probabilità di almeno una testa nelle prime due monete e almeno una croce nelle ultime due monete;
   (c) la probabilità condizionata di almeno una testa nelle prime tre monete sapendo che ci sono almeno due croci in tutte e quattro le monete.

Soluzione:

a). Il numero di teste è una variabile binomiale di parametri $n = 4$ e $p = 1/2$. Allora

$$P(2 \text{ teste}) = \binom{4}{2} 2^{-4} = \frac{3}{8}.$$

b). Il numero di teste nelle prime due monete (chiamiamolo X) e il numero di croci nelle ultime due monete (chiamiamolo Y) sono due variabili binomiali di parametri 2 e $\frac{1}{2}$ indipendenti. Allora

$$P(X \geqslant 1, Y \geqslant 1) = P(X \geqslant 1)P(Y \geqslant 1) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}.$$

c). Sia A l'evento "almeno una testa nelle prime tre monete" e B l'evento "almeno due croci in tutte e quattro le monete". Calcoliamo la probabilità di $A \cap B$. Dei 16 possibili esiti $\{C, T\}^4$ le sequenze che soddisfano l'evento richiesto sono $3 + 6 = 9$, dove 3 sono le sequenze

$$CCTC,\ TCCC,\ CTCC$$

che hanno tre croci in tutto (e una testa tra le prime tre), e $6 = \binom{4}{2}$ sono tutte le sequenze in $\{C, T\}^4$ che hanno due croci e due teste. Dunque $P(A \cap B) = \frac{9}{16}$. Inoltre la probabilità di due croci in tutto vale $3/8$, la probabilità di tre croci in tutto vale $1/4$ e la probabilità di quattro croci vale $1/16$. Dunque $P(B) = 3/8 + 1/4 + 1/16 = 11/16$. In conclusione,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{11}{16}} = \frac{9}{11}.$$

Nome:____

2. **(6 punti)** Due dadi vengono lanciati ripetutamente fino a che entrambe le facce sono pari.

   (a) Qual è il numero medio di lanci effettuati?

   (b) Qual è la probabilità di ottenere la coppia $(4, 4)$ all'ultimo lancio ?

Soluzione: (a). Sia T il numero di lanci effettuati. Allora T è una geometrica di parametro $1/4$ poiché la probabilità che entrambe le facce siano pari in un singolo lancio è $1/4$. In particolare,

$$\mathbb{E}[T] = 4.$$

(b). Sia A_k l'evento di non avere entrambe le facce pari in tutti i primi $k-1$ lanci e di avere $(4, 4)$ al k-esimo lancio. L'evento in questione si può scrivere come $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$. Gli eventi A_k sono disgiunti, e dunque si ha

$$\mathbb{P}\left(\cup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

L'evento A_k ha probabilità $(\frac{3}{4})^{k-1} \times \frac{1}{36}$, dove usiamo l'indipendenza dei lanci e il fatto che $\frac{3}{4}$ è la probabilità di non avere due facce pari in un lancio e $\frac{1}{36}$ è la probabilità di avere $(4, 4)$ in un lancio. Allora,

$$\mathbb{P}\left(\cup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Nome:____

3. **(6 punti)** Sia S_n la posizione dopo n passi della passeggiata aleatoria con incrementi indipendenti ± 1 con probabilità $1/2, 1/2$, con punto di partenza $S_0 = 0$.
   (a) Calcolare il valore atteso e la varianza di S_n.
   (b) Dimostrare che l'evento $\{S_n \leqslant 0.01n\}$ ha probabilità 1 nel limite $n \to \infty$
   (c) Trovare $t > 0$ tale che
$$\mathbb{P}(S_{100} \leqslant 10t) \approx 0.84.$$

Soluzione:

a). Scriviamo
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$
dove X_i sono indipendenti tali che $X_i = \pm 1$ con probabilità $1/2, 1/2$. La media di S_n è zero poiché gli incrementi X_i hanno media $E[X_i] = 0$. La varianza, per l'indipendenza, vale:
$$\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = n,$$
dove usiamo il fatto che $\mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] = 1$.

b). Notiamo che $\mu = E[X_1] = E[\frac{1}{n}S_n] = 0$ e dunque $S_n > 0.01n$ implica $|\frac{1}{n}S_n - E[\frac{1}{n}S_n]| > 0.01$. Allora
$$P(S_n > 0.01n) \leqslant P(|\tfrac{1}{n}S_n - E[\tfrac{1}{n}S_n]| > 0.01).$$
Per la disuguaglianza di Chebyshev si ha (come nella dimostrazione della legge dei grandi numeri):
$$P(|\tfrac{1}{n}S_n - E[\tfrac{1}{n}S_n]| > 0.01) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{(0.01)^2 n^2} = \frac{1}{(0.01)^2 n} \to 0\,, \quad n \to \infty.$$
Allora
$$P(S_n \leqslant 0.01n) = 1 - P(S_n > 0.01n) \to 1\,, \quad n \to \infty.$$

b). Per il teorema del limite centrale abbiamo che $S_n/\sqrt{n}$ è approssimata da una normale standard per n grandi. Allora
$$\mathbb{P}(S_n \leqslant t\sqrt{n}) \approx \Phi(t),$$
dove $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du$. Per $t = 1$ si ha $\Phi(1) \approx 0.84$ e dunque con $n = 100$ troviamo che $\mathbb{P}(S_{100} \leqslant 10t) \approx 0.84$ se $t = 1$.

Nome:____

4. **(6 punti)** Siano X e Y due variabili aleatorie esponenziali di parametro 1 indipendenti, e sia $Z = X + Y$. Calcolare:

   (a) Il valore atteso di Z^2;

   (b) il valore atteso di $e^{Z/2}$;

   (c) la probabilità che il punto di coordinate (X, Z) appartenga al rettangolo $[0,1] \times [0,2]$

Soluzione:

a). Si ha

$$E[Z^2] = E[X^2 + 2XY + Y^2] = E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2].$$

Per l'indipendenza $E[XY] = E[X]E[Y] = 1$ poiché $E[X] = E[Y] = 1$. Inoltre

$$E[X^2] = E[Y^2] = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2,$$

e dunque $E[Z^2] = 6$. Alla stessa conclusione si può arrivare osservando che Z è una variabile $\Gamma(2,1)$ e dunque

$$E[Z^2] = \int_0^\infty z^2 f_Z(z) dz = \int_0^\infty z^2 z e^{-z} dz = \int_0^\infty z^3 e^{-z} dz = 6.$$

b). Si ha

$$E[e^{Z/2}] = E[e^{X/2} e^{Y/2}] = E[e^{X/2}] E[e^{Y/2}] = 4,$$

dove abbiamo usato l'indipendenza e il fatto che

$$E[e^{X/2}] = E[e^{Y/2}] = \int_0^\infty e^{x/2} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x/2} dx = 2.$$

Alla stessa conclusione si può arrivare osservando che Z è una variabile $\Gamma(2,1)$ e dunque

$$E[e^{Z/2}] = \int_0^\infty e^{z/2} f_Z(z) dz = \int_0^\infty z e^{-z/2} dz = 4.$$

c). Dire che $(X, Z) \in [0,1] \times [0,2]$ equivale a dire che $(X, Y) \in A$ dove

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \, -x \leqslant y \leqslant 2 - x\}.$$

Allora usando il fatto che la densità congiunta di (X, Y) è $f_{X,Y}(x,y) = e^{-x} 1_{x \geqslant 0} \times e^{-y} 1_{y \geqslant 0}$,

$$\begin{aligned} P((X,Z) \in [0,1] \times [0,2]) &= \int_A f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_0^1 e^{-x} dx \int_0^{2-x} e^{-y} dy \\ &= \int_0^1 e^{-x} (1 - e^{-(2-x)}) dx = 1 - e^{-1} - e^{-2}. \end{aligned}$$

Nome:______________________________________

5. **(7 punti)** Sulla piattaforma YouTube vengono caricati in media 50000 nuovi video ogni giorno. Supponendo che i nuovi upload avvengano secondo un processo di Poisson calcolare:

   (a) Il valor medio e la varianza del numero di video caricati in 2 giorni;

   (b) un valore approssimato della probabilità che in 5 giorni vengano caricati più di 251000 video.

Soluzione: (a). Il numero di video caricati in 2 giorni è una variabile di Poisson di parametro $\lambda = 100000$. Allora il suo valor medio e la sua varianza sono pari a $\lambda = 100000$.

(b). Sia X il numero di video caricati in 5 giorni. Dunque X è una variabile di Poisson di parametro $\lambda = 250000$ e X si può rappresentare come somma di λ variabili aleatorie di Poisson di parametro 1 indipendenti. Per il teorema del limite centrale $Z = (X - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ è approssimata da una normale standard, e dunque

$$P(X > 251000) = P(Z > \tfrac{251000-250000}{\sqrt{250000}}) = P(Z > 2) \approx 1 - \Phi(2) \approx 0.02.$$

Nome:____

6. **(6 punti)** Tre amiche si danno appuntamento alle 8:00. Supponendo che ciascuna arrivi indipendentemente a un'orario aleatorio uniformemente distribuito tra le 7:50 e le 8:20, calcolare:

   (a) la probabilità che arrivino tutte e tre entro le 8:05;

   (b) in media quanti minuti dopo le 7:50 arriva la prima;

   (c) il valore atteso dell'orario di arrivo dell'ultima.

Soluzione: Siano X, Y, Z tre variabili uniformi in $[0, 1]$ indipendenti. Allora possiamo rappresentare l'orario di arrivo delle tre persone (in minuti a partire dalle ore 7:50) come $30 * X, 30 * Y$ e $30 * Z$ rispettivamente. La probabilità richiesta in a) è la probabilità che $\max\{X, Y, Z\} \leqslant 1/2$, che vale

$$P(\max\{X, Y, Z\} \leqslant 1/2) = P(X \leqslant 1/2, Y \leqslant 1/2, Z \leqslant 1/2) = P(X \leqslant 1/2)^3 = \frac{1}{8}.$$

(b). Sia $S = \min\{X, Y, Z\}$. Vogliamo calcolare il valore atteso

$$E[S] = \int_0^1 s f_S(s) ds.$$

La densità di S si può ottenere osservando che per ogni $x \in [0, 1]$ si ha

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \frac{d}{dx} P(S \leqslant x) = \frac{d}{dx}(1 - P(S > x)) = -\frac{d}{dx} P(S > x) \\ &= -\frac{d}{dx} P(X > x)^3 = -\frac{d}{dx}(1 - x)^3 = 3(1 - x)^2, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'indipendenza e il fatto che $P(X > x) = 1 - x$ per $x \in [0, 1]$. Allora

$$E[S] = 3 \int_0^1 s(1 - s)^2 ds = \frac{1}{4}.$$

Dunque in media la prima persona arriva $E[30 * S] = 30 \times \frac{1}{4} = 7.5$ minuti dopo le 7:50.

(c). Se $T = \max\{X, Y, Z\}$ allora la densità f_T soddisfa, per $x \in [0, 1]$:

$$f_T(x) = \frac{d}{dx} P(T \leqslant x) = \frac{d}{dx} P(X \leqslant x)^3 = \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2.$$

Dunque T ha valore atteso

$$E[T] = 3 \int_0^1 x^3 dx = \frac{3}{4}.$$

L'orario di arrivo della terza persona vale in media $7 : 50$ piú $30 \times E[T] = 22.5$ minuti ossia in media la terza persona arriva alle ore $8 : 12$ e 30 secondi.

Nome:____