Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2020-21, II semestre
19 giugno, 2021

CP210 Introduzione alla Probabilità: Esame 1

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si può usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome:____

1. **(6 punti)** Uno studente esegue un test composto da 4 domande scelte uniformemente a caso tra 9 domande. Supponiamo che lo studente sappia rispondere correttamente a 6 delle 9 domande mentre sbaglia la risposta alle restanti 3. Calcolare:

   (a) la probabilità che risponda a tutte le domande correttamente;

   (b) la probabilità che risponda alla seconda domanda correttamente sapendo che ha risposto alla prima correttamente;

   (c) la probabilità che risponda alla quarta domanda correttamente sapendo che ha risposto alle prime tre correttamente.

Soluzione:

a). Ci sono $\binom{9}{4}$ possibili test (non ordinati), tra cui $\binom{6}{4}$ sono composti di domande a cui lo studente risponde correttamente. Dunque la probabilità che risponda a tutte le domande correttamente vale

$$\frac{\binom{6}{4}}{\binom{9}{4}} = \frac{5}{42}.$$

b). Sia A l'evento "risponde correttamente alla prima domanda" e B l'evento "risponde correttamente alla seconda domanda". Allora

$$P(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \qquad P(A \cap B) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{5}{12}, \qquad P(B|A) = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{15}{24}.$$

c). Sia C l'evento "risponde correttamente alle prime tre domande" e D l'evento "risponde correttamente alla quarta domanda". Allora

$$P(C) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{5}{21}, \qquad P(C \cap D) = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{9}{4}} = \frac{5}{42}, \qquad P(D|C) = \frac{\frac{5}{42}}{\frac{5}{21}} = \frac{1}{2}.$$

Nome:____

2. **(6 punti)** Consideriamo i lanci di una moneta equa, e sia N il numero di lanci necessari per ottenere per la prima volta due teste consecutive oppure due croci consecutive. Calcolare:

   (a) la probabilità dell'evento $N = k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;

   (b) il valore atteso di N.

Soluzione: (a). E' evidente che $P(N = 1) = 0$. L'evento $N = 2$ equivale ad avere TT oppure CC nei primi due lanci, e dunque $P(N = 2) = 1/4 + 1/4 = 1/2$. L'evento $N = 3$ equivale ad avere CTT oppure TCC nei primi tre lanci, che ha probabilità $1/8 + 1/8 = 1/4$. L'evento $N = 4$ equivale ad avere $TCTT$ oppure $CTCC$ nei primi 4 lanci, che ha probabilità $1/8$, ecc. In generale, $N = k$ equivale ad avere $\cdots CTCTCTCTT$ oppure $\cdots TCTCTCTCC$ e dunque

$$P(N = k) = 2 \times 2^{-k} = 2^{-k+1}\,, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots$$

(b). Il valore atteso di N è dato da

$$E[N] = \sum_{k=2}^{\infty} k 2^{-k+1} = -1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-k} = 3.$$

Nome:____

3. **(6 punti)** Siano X_n e Y_n due variabili aleatorie indipendenti con distribuzione binomiale di parametri n e $p = 1/2$. Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - Y_n| \leqslant n/10)$

   (b) $\lim_{n\to\infty} P(X_n > Y_n + n/5)$

   (c) $\lim_{n\to\infty} P\left(X_n > Y_n + \sqrt{n/2}\right)$

Soluzione:

Notiamo che X_n e Y_n si possono scrivere entrambe come somme di n variabili aleatorie Bernoulli(1/2) indipendenti e $X_n - Y_n$ si può scrivere come

$$X_n - Y_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i \,,$$

dove Z_i sono indipendenti e tali che $Z_i = -1, 0, +1$ con probabilità $1/4, 1/2, 1/4$ rispettivamente. Per la LGN il primo limite è uguale a uno. Infatti, usando la disuguaglianza di Chebyshev si ha

$$P(|X_n - Y_n| > n/10) \leqslant \frac{100\mathrm{Var}(X_n - Y_n)}{n^2} = \frac{50}{n} \to 0,$$

dove abbiamo usato $\mathrm{Var}(X_n - Y_n) = \mathrm{Var}(X_n) + \mathrm{Var}(Y_n) = n/4 + n/4 = n/2$. Allora

$$P(|X_n - Y_n| \leqslant n/10) = 1 - P(|X_n - Y_n| > n/10) \to 1.$$

Osservando che $X_n > Y_n + n/5$ implica $|X_n - Y_n| > n/5$, vediamo che il secondo limite è zero:

$$P(X_n > Y_n + n/5) \leqslant P(|X_n - Y_n| < n/5) \leqslant \frac{25\mathrm{Var}(X_n - Y_n)}{n^2} = \frac{25}{2n} \to 0,$$

Per il terzo limite osserviamo che per il TLC la variabile $Z_n = (X_n - Y_n)/\sqrt{\mathrm{Var}(X_n - Y_n)}$ è approssimata da una normale standard. Allora

$$P(X_n > Y_n + \sqrt{n/2}) = P(Z_n > 1) \approx 1 - \Phi(1) \approx 0.16.$$

Nome:______________________________________

4. **(6 punti)** Il tempo, misurato in secondi, necessario a un calcolatore per completare una data transazione finanziaria è descritto da una variabile aleatoria $\Gamma(\alpha, \lambda)$ con parametri $\alpha = 1/2$ e $\lambda = 1$. Supponendo che tra il completamento di una transazione e l'inizio della successiva intercorre mezzo secondo e che le transazioni hanno durate indipendenti, calcolare:

   (a) Quante ore in media sono necessarie per completare 7200 transazioni;

   (b) Un valore approssimato della probabilità di completare almeno 7200 transazioni in 2 ore e 10 minuti.

Soluzione:

a). Per completare n transazioni serve un tempo T_n dato dalla somma di n variabili $\Gamma(1/2, 1)$ indipendenti oltre agli $(n-1)/2$ secondi che passano negli intervalli tra le transazioni. Dunque se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indicano le variabili $\Gamma(1/2, 1)$ si ha

$$T_n = (n-1)/2 + X_1 + \cdots + X_n.$$

Poiché X_i hanno valore atteso $\alpha/\lambda = 1/2$ si ha

$$E[T_n] = (n-1)/2 + n/2 = n - 1/2.$$

Se $n = 7200$ si ha $E[T_n] = 7200 - 1/2$ secondi, ossia in media occorrono circa 2 ore.

b). Per il teorema del limite centrale $Z_n = (T_n - E[T_n])/\sqrt{\mathrm{Var}(T_n)}$ è approssimata da una normale standard. Poiché $\mathrm{Var}(T_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = n\alpha/\lambda^2 = n/2$ si ha, per n grandi, per ogni $a \in \mathbb{R}$:

$$P(T_n \leqslant E[T_n] + a) = P(Z_n \leqslant a\sqrt{2/n}) \approx \Phi(a\sqrt{2/n}),$$

dove Φ è la funzione di distribuzione della normale standard. Ponendo $a = 600$ (10 minuti misurati in secondi), $n = 7200$, si ha $a\sqrt{2/n} = 600/\sqrt{3600} = 10$ e dunque la probabilità richiesta vale circa $\Phi(10) \approx 1$.

Nome:______________________________

5. **(6 punti)** I gol messi a segno in un campionato di calcio seguono un processo di Poisson con una media di tre gol a partita. Calcolare:

   (a) la probabilità che ci siano 6 gol in totale nelle prime due partite del torneo;

   (b) la probabilità condizionata che la prima partita termini zero a zero sapendo che nelle prime tre partite ci sono stati 6 gol in totale.

Soluzione: (a). Il numero di gol nelle prime due partite è una v.a. di Poisson di parametro 6 e dunque la probabilità che ci siano 6 gol nelle prime due partite vale $\frac{6^6 e^{-6}}{6!} \approx 0.16$.

(b). Sia N_1 il numero di gol nella prima partita e sia $N_{2,3}$ il numero di gol nelle successive due partite. Vogliamo calcolare

$$P(N_1 = 0 | N_1 + N_{2,3} = 6) = \frac{P(N_1 = 0, N_{2,3} = 6)}{P(N_1 + N_{2,3} = 6)}.$$

Usando l'indipendenza si ha $P(N_1 = 0, N_{2,3} = 6) = P(N_1 = 0)P(N_{2,3} = 6) = e^{-3} \frac{6^6 e^{-6}}{6!}$. Inoltre $P(N_1 + N_{2,3} = 6) = \frac{9^6 e^{-9}}{6!}$. Allora

$$P(N_1 = 0 | N_1 + N_{2,3} = 6) = \frac{6^6}{9^6} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0.09.$$

Nome:______________________________________

6. **(6 punti)** X e Y sono due punti scelti a caso uniformemente nell'intervallo $[-1,1]$. Supponendo X,Y indipendenti, calcolare:

   (a) la probabilità che $X^2+Y^2>1/2$;

   (b) il valore atteso di $\max\{X,Y\}$;

   (c) il valore atteso di $\min\{X,Y\}$.

Soluzione:

(a). Il punto di coordinate (X,Y) è uniformemente distribuito nel quadrato $[-1,1]^2$ che ha area 4. L'evento $X^2+Y^2\leqslant 1/2$ indica che il punto (X,Y) è nel cerchio di raggio $1/\sqrt{2}$ intorno all'origine, che ha area $\pi/2$. Dunque

$$P(X^2+Y^2>1/2)=1-P(X^2+Y^2\leqslant 1/2)=1-\frac{\pi/2}{4}=1-\frac{\pi}{8}.$$

(b). La densità di $Z=\max\{X,Y\}$ soddisfa $f_Z(z)=\frac{d}{dz}P(Z\leqslant z)$ con $P(Z\leqslant z)=P(X\leqslant z)P(Y\leqslant z)=(1+z)^2/4$ per ogni $z\in[-1,1]$. Dunque

$$f_Z(z)=\frac{1+z}{2}\,\mathbf{1}_{\{z\in[-1,1]\}}.$$

Allora

$$E[\max\{X,Y\}]=\int zf_Z(z)dz=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}z(1+z)dz=\frac{1}{3}.$$

(c). In maniera analoga osserviamo che la densità di $W=\min\{X,Y\}$ soddisfa $f_W(w)=\frac{d}{dw}P(W\leqslant w)$ con $P(W\leqslant w)=1-P(X>w)P(Y>w)=1-(1-w)^2/4$ per ogni $w\in[-1,1]$. Dunque

$$f_W(w)=\frac{1-w}{2}\,\mathbf{1}_{\{w\in[-1,1]\}},$$

e

$$E[\min\{X,Y\}]=\int wf_W(w)dw=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}w(1-w)dz=-\frac{1}{3}.$$

Nome:_______________________________________