Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2022-23, II semestre
15 giugno, 2023

CP210 Introduzione alla Probabilità: Esame 1

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si può usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, . . .) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome:______________________________________

1. **(6 punti)** Una scatola contiene tre dadi: uno rosso, uno giallo, e uno verde. Il dado verde ha la particolarità di avere tutte le facce uguali a 6. Gli altri due dadi sono normali. Peschiamo un dado a caso dalla scatola, lanciamo il dado e chiamiamo X il risultato. Calcolare

   (a) la densità di probabilità di X;

   (b) la probabilità condizionata di aver scelto il dado rosso sapendo che $X = 6$;

   (c) la probabilità condizionata dell'evento $X = 6$ sapendo che $X > 4$.

Soluzione:

a) Siano R, G, V gli eventi che indicano il colore del dado scelto. Abbiamo $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(V) = 1/3$ e

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \tfrac{1}{3}\mathbb{P}(X = k \,|\, R) + \tfrac{1}{3}\mathbb{P}(X = k \,|\, G) + \tfrac{1}{3}\mathbb{P}(X = k \,|\, V) \\ &= \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{6} \;+\; \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{6} \;+\; \tfrac{1}{3}\,\mathbf{1}_{k=6}\,, \qquad k = 1, \ldots, 6.\end{aligned}$$

Allora la densità di X vale

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{9} & \text{se } k = 1, \ldots, 5 \\ \frac{4}{9} & \text{se } k = 6 \end{cases}$$

b) Vogliamo calcolare

$$\mathbb{P}(R \,|\, X = 6) = \frac{\mathbb{P}(R)\mathbb{P}(X = 6 \,|\, R)}{\mathbb{P}(X = 6)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{6}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{8}.$$

b) Si ha

$$\mathbb{P}(X = 6 \,|\, X \in \{5, 6\}) = \frac{\mathbb{P}(X = 6)}{\mathbb{P}(X = 5) + \mathbb{P}(X = 6)} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{5}.$$

Nome:____

2. **(6 punti)** Consideriamo una passeggiata aleatoria con incrementi $+2$ con probabilità $1/3$, -1 con probabilità $1/3$, e 0 con probabilità $1/3$. Sia S_n la posizione dopo n passi, se la passeggiata parte in $S_0 = 0$. Calcolare:

   (a) la probabilità dell'evento $S_2 = 0$;

   (b) la probabilità dell'evento $S_3 = 0$;

   (c) un valore approssimato per la probabilità dell'evento $S_n > n/3$ per n grandi.

Soluzione: (a). L'unico modo di avere $S_2 = 0$ è fare due volte un salto con incremento 0. Dunque la probabilità dell'evento $S_2 = 0$ vale $(1/3)^2 = 1/9$.

(b). Ci sono quattro modi di avere $S_3 = 0$:

1. primi due passi a sinistra (-1-1) e poi un passo a destra (+2);
2. primo passo a sinistra (-1) secondo a destra (+2) terzo passo a sinistra (-1);
3. primo passo a destra (+2) ultimi due passi a sinistra (-1-1);
4. tre passi con incremento zero.

Ciascuno di questi ha probabilità $(1/3)^3$, e dunque l'evento $S_3 = 0$ ha probabilità

$$P(S_3 = 0) = 4(1/3)^3 = \frac{4}{27}.$$

(b). Notiamo che l'incremento i-esimo X_i ha media $2 \times (1/3) - 1 \times (1/3) = 1/3$. Inoltre la varianza di ogni incremento X_i è $4 \times (1/3) + 1 \times (1/3) - 1/9 = 14/9$. Allora per il teorema del limite centrale, scrivendo $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ vediamo che $Z_n = (S_n - n/3)/\sqrt{4n/9}$ è approssimativamente una normale standard per n grandi. Ne segue che per n grandi

$$P(S_n > n/3) = P(Z_n > 0) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz = \frac{1}{2}.$$

Nome:____

3. **(6 punti)** Consideriamo n punti $X_1, \dots, X_n$ uniformemente distribuiti sul segmento di lunghezza 2 centrato nell'origine della retta reale e supponiamo che i punti siano indipendenti. Sia P_n il loro baricentro, ossia il punto $\frac{1}{n}\sum_{i=1} X_i$. Usando la legge dei grandi numeri, calcolare, nel limite $n \to \infty$,

   (a) la probabilità che P_n appartenga al segmento di lunghezza 1 centrato nell'origine;

   (b) la probabilità che P_n sia a distanza almeno $\frac{1}{4}$ dall'origine.

Soluzione:

(a). Le variabili X_i hanno media nulla e varianza $\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = 1/3$ e dunque per la legge dei grandi numeri sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \in [-\varepsilon, \varepsilon]\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(P_n \notin [-\varepsilon, \varepsilon]\right) = 1.$$

Allora se I_ε indica l'intervallo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, prendendo $\varepsilon = 1/2$, la probabilità richiesta vale

$$\mathbb{P}\left(P_n \in I_{\frac{1}{2}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]\right) \longrightarrow 1\,, \qquad n \to \infty.$$

(b). Sia E_n l'evento che P_n è a distanza maggiore di $1/4$ dall'origine, allora $E_n = \left\{P_n \notin I_{\frac{1}{4}}\right\}$, e dunque prendendo $\varepsilon = 1/4$ abbiamo

$$\mathbb{P}(E_n) = 1 - \mathbb{P}\left(P_n \in I_{\frac{1}{4}}\right) \longrightarrow 0\,, \qquad n \to \infty.$$

Nome:____

4. **(6 punti)** Siano X, Y due variabili indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro 1, e siano D_X e D_Y i due dischi aleatori definiti da

$$D_X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leqslant X^2\},$$
$$D_Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \leqslant Y^2\}.$$

Calcolare:

(a) il valore atteso dell'area di D_X;

(b) la covarianza tra l'area di D_X e l'area di D_Y;

(c) la probabilità $\mathbb{P}(D_X \cap D_Y \neq \emptyset)$

Soluzione:

a). Indichiamo con area(D_X) l'area del disco D_X. Allora area$(D_X) = \pi X^2$, e

$$\mathbb{E}[\text{area}(D_X)] = \pi\,\mathbb{E}[X^2] = \pi \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 2\pi.$$

b). X e Y sono indipendenti e dunque area(D_X) e area(D_Y) sono variabili aleatorie indipendenti. Allora la covarianza è zero:

$$\text{Cov}(\text{area}(D_X), \text{area}(D_Y)) = 0.$$

c). Si ha $D_X \cap D_Y \neq \emptyset$ se e solo se $X+Y > 2$. Ricordando che $X+Y$ è una gamma di parametri $\alpha = 2$ e $\lambda = 1$ si ha

$$\mathbb{P}(D_X \cap D_Y \neq \emptyset) = \mathbb{P}(X+Y > 2) = \int_2^\infty x e^{-x} dx = 3e^{-2}.$$

Nome:______________________________________

5. **(6 punti)** Anna e Bruno lavorano in un call center e ricevono, indipendentemente, chiamate secondo un processo di Poisson, con media 1 ogni 5 minuti per Anna, e 1 ogni 10 minuti per Bruno. Calcolare

   (a) il valore atteso del numero di chiamate ricevute in totale da Anna e Bruno in un'ora di lavoro

   (b) la probabilità che Anna e Bruno ricevano in totale 2 chiamate nei primi 10 minuti di lavoro.

   (c) la probabilità condizionata che Anna riceva 2 chiamate nei primi 10 minuti di lavoro sapendo che Anna e Bruno hanno ricevuto in totale almeno 1 chiamata nei primi 10 minuti.

Soluzione: (a). In un'ora Anna riceve in media $60/5 = 12$ chiamate, e Bruno $60/10 = 6$ chiamate, dunque in totale ricevono 18 chiamate.

(b). Indichiamo con N_A, N_B il numero di chiamate per Anna e Bruno rispettivamente, nei primi 10 minuti di lavoro. Allora N_A è Poisson di parametro $\lambda_A = 2$, mentre N_B è Poisson di parametro $\lambda_B = 1$. E dunque, per l'indipendenza, la loro somma è Poisson di parametro $\lambda_A+\lambda_B = 3$. Allora

$$P(N_A + N_B = 2) = \tfrac{9}{2}\, e^{-3}.$$

(c). La probabilità richiesta vale

$$P(N_A = 2 | N_A + N_B \geqslant 1) = \frac{P(N_A = 2)}{P(N_A + N_B \geqslant 1)} = \frac{2\, e^{-2}}{1 - e^{-3}} = \frac{2\, e}{e^3 - 1},$$

dove usiamo il fatto che $\{N_A = 2\} \cap \{N_A + N_B \geqslant 1\} = \{N_A = 2\}$ e $P(N_A + N_B \geqslant 1) = 1 - P(N_A + N_B = 0) = 1 - e^{-3}$.

Nome:____

6. **(6 punti)** Un negozio di alimentari chiude in un orario aleatorio tra le 20:00 e le 20:30, distribuito come 20:00+X dove X, misurata in minuti, è la variabile aleatoria con densità di probabilità
$$f_X(x) = \frac{30-x}{450}\, \mathbf{1}_{x\in[0,30]}.$$
Supponiamo di arrivare indipendentemente a un orario uniformemente distribuito tra le 19:50 e le 20:20. Calcolare:

   (a) a che ora chiude in media il negozio ?

   (b) la probabilità che troviamo il negozio aperto;

   (c) la probabilità condizionata di essere arrivati prima delle 20:00 sapendo che abbiamo trovato il negozio aperto.

Soluzione:

(a). Il valore atteso della variabile X vale
$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{30} \frac{x(30-x)}{450}\, dx = 10.$$
Allora in media il negozio chiude alle 20:10.

(b). Indichiamo con 20:00+Y l'orario del nostro arrivo. Dunque Y, misurata in minuti, è uniforme in $[-10, 20]$. Per l'indipendenza la densità congiunta di (X, Y) è
$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{30-x}{450}\, \mathbf{1}_{x\in[0,30]} \times \frac{y}{30}\, \mathbf{1}_{y\in[-10,20]}.$$
L'evento di trovare aperto equivale all'evento $X > Y$. Dunque la probabilità che troviamo il negozio aperto vale
$$\begin{aligned}
P(X > Y) &= \frac{1}{30\times 450} \int_0^{30} (30-x)dx \int_{-10}^{20} dy\, \mathbf{1}_{y<x} \\
&= \frac{1}{30\times 450} \int_0^{30} (30-x)dx \int_{-10}^{x} dy \\
&= \frac{1}{30\times 450} \int_0^{30} (30-x)(x+10)dx = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

(c). La probabilità condizionata richiesta vale
$$P(Y < 0 \,|\, X > Y) = \frac{P(Y<0,\, X>Y)}{P(X>Y)} = \frac{P(Y<0)}{P(X>Y)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Nome:____