Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2023-24, II semestre
17 giugno 2024

CP210 Probabilità: esame del 17 giugno 2024

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si puo' usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nella tabella sotto. Notare che già con cinque esercizi risolti correttamente si arriva al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome:____

1. Un urna contiene 1 pallina rossa e 9 palline bianche. Estraiamo una alla volta le palline, senza rimpiazzo. Calcolare

   (a) per ogni $k = 1, \dots, 10$, la probabilità che alla k-esima estrazione si ottiene la pallina rossa.

   (b) per ogni $k = 2, \dots, 10$, la probabilità che alla k-esima estrazione si ottiene la pallina rossa sapendo che la prima estrazione è bianca.

   (c) per ogni $j \neq k$, la probabilità che alla k-esima estrazione si ottiene la pallina rossa sapendo che la j-esima estrazione è bianca.

Soluzione: (a). Possiamo ordinare le palline in maniera uniforme, e dunque la pallina rossa occupa la k-esima posizione con probabilità $1/10$, per ogni $k = 1, \dots, 10$. La probabilità che alla k-esima estrazione si ottiene la pallina rossa è $1/10$, per ogni $k = 1, \dots, 10$.

(b). Fissiamo $k = 2, \dots, 10$. Sia A_1 l'evento " la prima estrazione è bianca" e B_k " la k-esima estrazione è rossa" . Chiaramente si ha $\mathbb{P}(A_1) = 9/10, \mathbb{P}(B_k) = 1/10$. Inoltre $B_k \subset A_1$ e dunque $A_1 \cap B_k = B_k$. Allora la probabilità condizionata richiesta al punto 2 vale

$$\mathbb{P}(B_k \mid A_1) = \frac{\mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{1}{9}.$$

(c). Fissiamo $1 \leqslant j \neq k \leqslant 10$, e definiamo A_j l'evento " la j-esima estrazione è bianca" e B_k " la k-esima estrazione è rossa". Il ragionamento precedente mostra che

$$\mathbb{P}(B_k \mid A_j) = \frac{\mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(A_j)} = \frac{1}{9}.$$

Notiamo che l'ordine ($j < k$ oppure $k < j$) non importa.

Nome:____

2. Consideriamo lanci ripetuti di un dado a 4 facce tale che la faccia 1 ha probabilità $\frac{1}{2}$ e le altre facce $(2,3,4)$ hanno tra loro uguali probabilità. Siano T_1 e T_2 il numero di lanci per ottenere il primo 1 e il primo 2 rispettivamente.

   (a) Dire se T_1 e T_2 sono indipendenti.

   (b) Calcolare i valori attesi di T_1 e T_2 rispettivamente.

   (c) Calcolare la probabilità dell'evento $\{T_2 > T_1\}$.

Soluzione:
Sia $p = 1/2$ la probabilità della faccia 1. Le facce $2,3,4$ devono avere probabilità $(1-p)/3$ ciascuna, in modo da avere somma totale uguale a 1. T_1 e T_2 sono variabili geometriche di parametro p e $(1-p)/3$ rispettivamente. Pertanto i valori attesi sono $E[T_1] = 1/p$ e $E[T_2] = 3/(1-p)$, dunque

$$E[T_1] = 2\,, \qquad E[T_2] = 6.$$

Le variabili non sono indipendenti poiché per esempio $\{T_1 = 1\} \cap \{T_2 = 1\} = \emptyset$ mentre $\mathbb{P}(T_1 = 1) = p$ e $\mathbb{P}(T_2 = 1) = (1-p)/3$, dunque

$$0 = \mathbb{P}(T_1 = 1, T_2 = 1) \neq \mathbb{P}(T_1 = 1)\mathbb{P}(T_2 = 1).$$

Siano $k > j$ due interi positivi. L'evento $\{T_1 = j\} \cap \{T_2 = k\}$ equivale a: i primi $j-1$ lanci sono diversi da 1 e 2; il j-esimo lancio è 1; i lanci da $j+1$ a $k-1$ (inclusi) sono diversi da 2; il k-esimo lancio è 2. Allora per $k > j \geq 1$ si ha

$$\mathbb{P}(T_1 = j, T_2 = k) = (2(1-p)/3)^{j-1}\, p\, (p + 2(1-p)/3)^{k-j-1}\, (1-p)/3.$$

Allora calcoliamo

$$\mathbb{P}(T_2 > T_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathbb{P}(T_1 = j, T_2 = k) = p \sum_{j=1}^{\infty} (2(1-p)/3)^{j-1} = \frac{3p}{1+2p}.$$

Per $p = 1/2$ abbiamo

$$\mathbb{P}(T_2 > T_1) = \frac{3}{4}.$$

Nome:____

3. I ciclisti che passano in un dato punto di una strada di provincia seguono un processo di Poisson con una media di 6 al minuto. Indipendentemente da questi, le automobili che passano nello stesso punto seguono un processo di Poisson con una media di 12 al minuto. Calcolare

   (a) la probabilità che durante 10 secondi non passino né automobili né ciclisti.

   (b) la probabilità condizionata di vedere 1 ciclista e 1 automobile in un dato intervallo di 20 secondi sapendo che nei primi dieci secondi dello stesso intervallo di tempo non sono passati né automobili né ciclisti.

   (c) la probabilità che in un dato intervallo di 20 secondi, nei primi dieci secondi si hanno zero automobili e nei secondi dieci secondi si hanno zero ciclisti.

Soluzione: Il numero di ciclisti in 10 secondi è Poisson di parametro 1, e il numero di automobili in 10 secondi è Poisson di parametro 2. Per l'indipendenza si ha che la probabilità che durante 10 secondi non passino né automobili né ciclisti vale

$$e^{-1} \times e^{-2} = e^{-3}.$$

Per l'indipendenza su intervalli disgiunti la probab. condizionata richiesta al secondo punto equivale alla probab. incondiziona di 1 ciclista e 1 automobile in un intervallo di 10 secondi, e per l'indipendenza dei due processi di Poisson abbiamo

$$e^{-1} \times 2e^{-2} = 2e^{-3},$$

Di nuovo usando l'indipendenza dei due processi di Poisson la probab. richiesta al terzo punto vale

$$e^{-2} \times e^{-1} = e^{-3}.$$

Nome:______________________________________

4. Consideriamo un referendum con n votanti chiamati a scegliere tra SI e NO. Supponiamo che ogni votante, indipendentemente vota SI con probabilità $\frac{2}{3}$ e NO con probabilità $\frac{1}{3}$. Sia X_n il numero di SI ottenuti al termine della votazione.
   (a) Calcolare la probabilità che $X_3 = 2$.
   (b) Calcolare la probabilità che $X_n > \frac{3n}{4}$ per $n \to \infty$.
   (c) Calcolare la probabilità che $|X_n - \frac{2n}{3}| \leqslant \sqrt{n} \log n$, per $n \to \infty$.

Soluzione: La X_n è una binomiale di parametri n, $\frac{2}{3}$. Dunque, per interi $n \geqslant m \geqslant 0$ si ha

$$\mathbb{P}(X_n = m) = (2/3)^m (1/3)^{n-m} \binom{n}{m} = \frac{2^m}{3^n} \binom{n}{m}.$$

Allora

$$\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{2^2}{3^3} \binom{3}{2} = \frac{4}{9}.$$

Osserviamo che

$$Z_n = \frac{X_n - \frac{2n}{3}}{\sqrt{\frac{2n}{9}}}$$

è approssimativamente una normale standard per il teorema del limite centrale. In altri termini i valori tipici di X_n sono intorno a $2n/3$ con fluttuazioni dell'ordine di $\sqrt{n}$, e pertanto, essendo $3/4 > 2/3$, l'evento $X_n > \frac{3n}{4}$ ha probabilità che tende a zero per $n \to \infty$. Per mostrare questo in dettaglio, possiamo procedere come segue. Se $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(Z_n > t) = 1 - \Phi(t)\,.$$

Notiamo che per ogni $t > 0$ è fissato, se n è abbastanza grande si ha che $X_n > 3n/4$ implica $Z_n > t$. Allora $\mathbb{P}(X_n > 3n/4) \leqslant \mathbb{P}(Z_n > t)$. Allora

$$\limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n > 3n/4) \leqslant 1 - \Phi(t),$$

per ogni $t > 0$. Passando a $t \to \infty$ si ha $\mathbb{P}(X_n > 3n/4) \to 0$.

In maniera simile si ottiene

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|X_n - \tfrac{2n}{3}| \leqslant \sqrt{n} \log n) = 1.$$

Infatti, se $t > 0$ è fissato, per n abbastanza grande si ha che $|Z_n| \leqslant t$ implica $|X_n - \frac{2n}{3}| \leqslant \sqrt{n} \log n$. Allora

$$\liminf_{n \to \infty} \mathbb{P}(|X_n - \tfrac{2n}{3}| \leqslant \sqrt{n} \log n) \geqslant 2\Phi(t) - 1,$$

e passando a $t \to \infty$ si conclude.

Nome:____

5. Sia $P = (X, Y)$ un punto del piano scelto uniformemente a caso nella regione $A = D_1 \cup D_2$, dove D_1 e D_2 sono i dischi

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+3)^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Calcolare:

(a) la probabilità che $P \in D_1 \cap D_2$

(b) la probabilità che $P \in D_1$

(c) la probabilità che $X \in [-3, 0]$

Soluzione: Notiamo che $D_1 \cap D_2 = \{(-1, 0)\}$, ossia il punto di coordinate $(-1, 0)$. Allora

$$\mathbb{P}(P \in D_1 \cap D_2) = \frac{\text{Area}(D_1 \cap D_2)}{\text{Area}(D_1 \cup D_2)} = 0.$$

Dunque $P \in D_1$ e $P \in D_2$ sono eventi le cui probabilità sommano a 1. Inoltre poiché P è uniforme, le probabilità sono proporzionali alle aree di D_1 e D_2, che valgono π e 4π rispettivamente. Allora

$$\mathbb{P}(P \in D_1) = \frac{\text{Area}(D_1)}{\text{Area}(D_1 \cup D_2)} = \frac{\pi}{\pi + 4\pi} = \frac{1}{5}.$$

Notiamo che $X \in [-3, 0]$ si può avere in due modi: P è nella metà destra di D_2 oppure P è nella metà sinistra di D_1. Allora

$$\mathbb{P}(X \in [-3, 0]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(P \in D_1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(P \in D_2) = \frac{1}{2}.$$

Nome:____

6. Sia X la variabile aleatoria continua con denistà di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} c\,x \exp\left(-x^2\right) & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Calcolare:

(a) Il valore di c.

(b) La funzione di distribuzione di X.

(c) Il valore atteso di X.

Soluzione: Notiamo che f ha integrale

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)dx = c\int_{0}^{t} x \exp\left(-x^2\right)dx = \tfrac{c}{2}(1 - \exp\left(-t^2\right)).$$

allora per ottenere $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ si deve avere $c = 2$. Inoltre la funzione di distribuzione di X è data da

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-t^2\right) & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Per il valore atteso abbiamo, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx &= \int_{0}^{\infty} 2x^2 \exp\left(-x^2\right)dx \\ &= x(-\exp\left(-x^2\right))\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \exp\left(-x^2\right)dx \\ &= \int_{0}^{\infty} \exp\left(-x^2\right)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio usa la nota formula per l'integrale Gaussiano

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}. \qquad a > 0$$

Nome:____