Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2024-25, II semestre
16 giugno 2025

CP210 Probabilità: esame del 16 giugno 2025

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si puo' usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nella tabella sotto. Notare che già con cinque esercizi risolti correttamente si arriva al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome:____

1. Nell'arco di una giornata Anna deve noleggiare tre volte una bici elettrica. Supponendo che ogni volta il costo è una variabile aleatoria geometrica con valor medio di 5 euro, e supponendo indipendenza tra i tragitti, calcolare:

   (b) La probabilità che il terzo tragitto costi piú di 9 euro.

   (c) La probabilità che nessun tragitto costi meno di 4 euro.

   (a) La varianza della spesa totale.

Soluzione:

(a) Sia T_i la v.a. geometrica di parametro $p = 1/5$, la spesa del tragitto i-esimo, misurata in euro. L'evento richiesto è $T_3 > 9$. Allora

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{terzo tragitto costa piú di 9 euro})\\&\quad= \mathbb{P}(T_3 > 9) = (1-p)^9 = (4/5)^9\,.\end{aligned}$$

(b) L'evento richiesto è $\min\{T_1, T_2, T_3\} \geq 4$. Allora

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{nessun tragitto costa meno di 4 euro})\\&\quad= \mathbb{P}(\{T_1 \geq 4\} \cap \{T_2 \geq 4\} \cap \{T_3 \geq 4\})\\&\quad= \mathbb{P}(\{T_1 \geq 4\})\mathbb{P}(\{T_2 \geq 4\})\mathbb{P}(\{T_3 \geq 4\}) = ((1-p)^3)^3 = (4/5)^9.\end{aligned}$$

(c) La spesa totale vale $Z = T_1 + T_2 + T_3$. Per l'indipendenza si ha

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(T_1) + \mathrm{Var}(T_2) + \mathrm{Var}(T_3) = 3 \times (1-p)/p^2 = 60.$$

Nome:______________________________________

2. Un dado equilibrato viene lanciato 3 volte. Calcolare la probabilità di osservare:
   (a) Tre facce pari.
   (b) Una faccia pari e due dispari.
   (c) Almeno due facce uguali consecutive.

Soluzione:

(a) Ogni faccia è pari con probabilità $1/2$, e per indipendenza si ha probabilità $1/8$ di avere tre facce pari.

(b) Ci sono tre modi di posizionare una faccia pari e due dispari. Ciascun modo ha probabilità $1/8$, dunque si ha probabilità $3/8$ di una faccia pari e due dispari.

(c) Almeno due facce uguali consecutive si possono ottenere in diversi modi: tre facce uguali (AAA, 6 modi su 6^3); le prime due facce uguali e la terza diversa (AAB, $6 \times 5 = 30$ modi su 6^3); le ultime due facce uguali e la prima diversa (BAA, $6 \times 5 = 30$ modi su 6^3). In conclusione si hanno 66 modi su 6^3 e dunque la probabilità vale $11/36$.

Nome:____

3. Una scatola contiene 8 biglie numerate da 1 a 8. Estraiamo una alla volta le biglie, senza rimpiazzo. Calcolare:

   (a) La probabilità che alla terza estrazione il numero sia pari.

   (b) La probabilità che alla quarta estrazione il numero sia maggiore di 5, sapendo che alla terza estrazione è stato estratto un numero minore di 3.

   (c) La probabilità che alla seconda estrazione il numero sia multiplo di 3, sapendo che il numero successivo è pari.

Soluzione:

(a) Il risultato dell'estrazione si può considerare una permutazione di 8 ogetti scelta uniformemente a caso tra le 8! possibili. Contiamo quante di queste 8! permutazioni hanno un numero pari nella terza posizione. Ci sono 4 numeri pari (2, 4, 6, 8) tra 1 e 8 e una volta scelto uno di questi 4 per la terza posizione, restano 7! permutazioni per le altre posizione. Allora la probabilità che alla terza estrazione il numero sia pari è:

$$\mathbb{P}(\text{pari alla terza estrazione}) = \frac{4 \times 7!}{8!} = \frac{1}{2}.$$

(b) Se alla terza estrazione è stato estratto un numero minore di 3 (ossia 1 o 2), ci sono 7 numeri tra cui scegliere per la quarta estrazione. Di questi, 3 sono maggiori di 5 (ossia 6, 7, o 8). Allora

$$\mathbb{P}(> 5 \text{ alla quarta estrazione} \mid < 3 \text{ alla terza estrazione}) = \frac{3}{7}.$$

Allo stesso risultato si arriva procedendo piú formalmente come segue. Se definiamo gli eventi $A = \{> 5 \text{ alla quarta estrazione}\}$ e $B = \{< 3 \text{ alla terza estrazione}\}$, allora il numero di permutazioni che soddisfano $A \cap B$ vale

$$\# A \cap B = 2 \times 3 \times 6!$$

Poiché $\# B = 2 \times 7!$ otteniamo $P(A \mid B) = \# A \cap B / \# B = 3/7$.

(c) Vogliamo $P(A|B)$ dove $A = \{3, 6 \text{ alla seconda}\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8 \text{ alla terza}\}$. Notiamo che $P(B) = 1/2$. Per calcolare $P(A \cap B)$ osserviamo che

$$\begin{aligned} A \cap B &= (\{3 \text{ alla seconda}\} \cap \{2, 4, 6, 8 \text{ alla terza}\}) \\ &\quad \cup (\{6 \text{ alla seconda}\} \cap \{2, 4, 8 \text{ alla terza}\}) \\ &=: E \cup F. \end{aligned}$$

Ora $P(E) = \frac{1}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{14}$ mentre $P(F) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{56}$. Allora

$$P(A|B) = 2P(A \cap B) = 2(P(E) + P(F)) = \frac{1}{4}.$$

Nome:____

4. I clienti di una caffetteria arrivano secondo un processo di Poisson con una media di 1 cliente al minuto. Consideriamo un intervallo di 5 minuti. Definiamo i seguenti eventi:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Almeno 1 arrivo nei primi due minuti}\}, \\ B &= \{\text{Almeno 3 arrivi nei successivi tre minuti}\}, \\ C &= \{\text{Esattamente 4 arrivi nei 5 minuti}\}. \end{aligned}$$

Calcolare le probabilità:

(a) $\mathbb{P}(A \cap B)$

(b) $\mathbb{P}(A \cup B)$

(c) $\mathbb{P}(A \cap B \mid C)$

Soluzione:

(a) Chiamiamo N_1 il numero di arrivi nei primi due minuti e N_2 il numero di arrivi nei restanti tre minuti. Allora N_1 è Poisson(2), N_2 è Poisson(3) e sono indipendenti. Allora

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(N_1 \geq 1, N_2 \geq 3) = P(N_1 \geq 1)P(N_2 \geq 3) \\ &= (1 - e^{-2})(1 - e^{-3} - 3e^{-3} - \tfrac{3^2}{2}\, e^{-3}) = (1 - e^{-2})(1 - \tfrac{17}{2}\, e^{-3})\,. \end{aligned}$$

(b) Calcoliamo:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(N_1 \geq 1) + P(N_2 \geq 3) - P(N_1 \geq 1)P(N_2 \geq 3) \\ &= (1 - e^{-2}) + (1 - \tfrac{17}{2}\, e^{-3}) - (1 - e^{-2})(1 - \tfrac{17}{2}\, e^{-3}) = 1 - \tfrac{17}{2}\, e^{-5}\,. \end{aligned}$$

(c) Notiamo che $A \cap B \cap C = \{N_1 = 1\} \cap \{N_2 = 3\}$. Allora

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B \mid C) &= \frac{\mathbb{P}(N_1 = 1 \cap N_2 = 3)}{\mathbb{P}(N_1 + N_2 = 4)} \\ &= \frac{2e^{-2}\,\frac{3^3 e^{-3}}{3!}}{\frac{5^4 e^{-5}}{4!}} = \frac{8}{3}(3/5)^4, \end{aligned}$$

dove usiamo il fatto che $N_1 + N_2$ è Poisson di parametro 5.

Nome:______________________________________

5. Una compagnia aerea ha n passeggeri prenotati per un volo. Ogni passeggero ha una probabilità $p = 0.9$ di presentarsi al volo, indipendentemente dagli altri passeggeri. Calcolare, nel limite $n \to \infty$:

   (a) La probabilità che almeno il 95% dei passeggeri si presenti.

   (b) La probabilità che meno dell'80% dei passeggeri si presenti.

   (c) La probabilità che almeno il 90% dei passeggeri si presenti.

Soluzione:

(a) Sia X_n il numero di passeggeri che si presenta. Allora X_n segue una distribuzione binomiale $X_n \sim \text{Binomiale}(n, p)$ con $p = 0.9$. Ponendo $\epsilon = 0.05$, la probabilità richiesta è:

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \geq 0.95\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \geq p + \epsilon\right).$$

Dalla legge dei grandi numeri segue che $\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \geq p + \epsilon\right) \to 0$ per ogni $\epsilon > 0$ fissato, e dunque la probabilità richiesta tende a 0, per $n \to \infty$.

(b) Similmente, per $X_n < 0.8n$, ponendo $\epsilon = 0.1$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} < 0.8\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} < p - \epsilon\right).$$

Dalla legge dei grandi numeri segue che $\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} < p - \epsilon\right) \to 0$ per ogni $\epsilon > 0$ fissato, e dunque la probabilità richiesta tende a 0, per $n \to \infty$.

(c) Per il teorema del limite centrale:

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Allora la probabilità richiesta è

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \geq 0.9\right) = \mathbb{P}\left(Z_n \geq 0\right) \approx \frac{1}{2}.$$

Nome:____

6. Siano X, Y due variabili indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro 1. Sia R il rettangolo di base X e altezza Y, centrato nell'origine del piano, e sia Q il quadrato di lato 2 centrato nell'origine. Calcolare:
   (a) La probabilità che il punto di coordinate $(1, 1)$ appartenga a R.
   (b) La probabilità che R sia contenuto nel quadrato Q.
   (c) Il valore atteso dell'area della intersezione $R \cap Q$.

Soluzione:

(a) Poiché R è centrato nell'origine, il vertice in alto a destra di R ha coordinate $(X/2, Y/2)$. L'evento $(1, 1) \in R$ equivale a $\{X \geq 2\} \cap \{Y \geq 2\}$. Allora

$$\mathbb{P}((1, 1) \in R) = \mathbb{P}(\{X \geq 2\} \cap \{Y \geq 2\}) = \mathbb{P}(X \geq 2)\mathbb{P}(Y \geq 2) = e^{-4}.$$

(b) L'evento $R \subset Q$ equivale a $\{X \leq 2\} \cap \{Y \leq 2\}$. Allora

$$\mathbb{P}(R \subset Q) = \mathbb{P}(\{X \leq 2\} \cap \{Y \leq 2\}) = \mathbb{P}(X \leq 2)\mathbb{P}(Y \leq 2) = (1 - e^{-2})^2.$$

(c) Osserviamo che l'area della intersezione $R \cap Q$ è un rettangolo che ha per base $\min\{X, 2\}$ e per altezza $\min\{Y, 2\}$. Allora per l'indipendenza il valore atteso è

$$E[\text{Area}(R \cap Q)] = E[\min\{X, 2\} \times \min\{Y, 2\}] = E[\min\{X, 2\}]E[\min\{Y, 2\}] = E[\min\{X, 2\}]^2 .$$

Inoltre,

$$E[\min\{X, 2\}] = \int_0^\infty \min\{x, 2\} e^{-x} dx = \int_0^2 x e^{-x} dx + \int_2^\infty 2e^{-x} dx = 1 - e^{-2} .$$

In conclusione,

$$E[\text{Area}(R \cap Q)] = (1 - e^{-2})^2 .$$

Nome:____