Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2025-26, II semestre
24 giugno 2026

CP210 Probabilità: esame del 24 giugno 2026

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si puo' usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nella tabella sotto. Notare che già con cinque esercizi risolti correttamente si arriva al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome:____

1. Un mazzo contiene 10 carte, di cui 4 rosse e 6 nere. Le estraiamo una alla volta senza rimpiazzo. Calcolare:

   (a) la probabilità che la quinta carta estratta sia rossa;

   (b) la probabilità condizionata che la quinta carta sia rossa, sapendo che le prime 3 carte contengono esattamente 1 carta rossa;

   (c) la probabilità condizionata che la prima carta sia rossa, sapendo che le ultime 3 carte contengono esattamente 2 carte nere.

Soluzione: Abbiamo un mazzo con 10 carte, 4 rosse e 6 nere.

(a) Per simmetria tra le posizioni,

$$\mathbb{P}(\text{5a carta rossa}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

(b) Sapendo che tra le prime 3 carte c'è esattamente una rossa, restano 7 carte, di cui 3 rosse e 4 nere. La quinta carta è una delle carte rimanenti, dunque, di nuovo per simmetria tra le posizioni,

$$\mathbb{P}(\text{5a rossa} \mid \text{nelle prime 3 c'è 1 rossa}) = \frac{3}{7}.$$

(c) Sapendo che le ultime 3 carte contengono esattamente 2 nere, esse contengono anche 1 rossa. Tolte queste carte, nelle prime 7 posizioni restano 3 rosse e 4 nere. Quindi

$$\mathbb{P}(\text{1a rossa} \mid \text{nelle ultime 3 ci sono 2 nere}) = \frac{3}{7}.$$

Nome:____

2. Lanciamo 5 monete bilanciate. Calcolare:

   (a) la probabilità che escano almeno 3 teste;

   (b) la probabilità condizionata che escano esattamente 4 teste, sapendo che il numero totale di teste è almeno 3;

   (c) la covarianza tra il numero di teste nelle prime tre monete e il numero di teste nelle ultime tre monete.

Soluzione: Sia H il numero di teste. Allora $H \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ con $n=5$ e $p=1/2$.

(a)

$$\mathbb{P}(H \geq 3) = \frac{1}{2^5}\left[\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}\right] = \frac{10+5+1}{32} = \frac{1}{2}.$$

(b)

$$\mathbb{P}(H = 4 \mid H \geq 3) = \frac{\mathbb{P}(H=4)}{\mathbb{P}(H \geq 3)} = \frac{\binom{5}{4}/32}{1/2} = \frac{5/32}{16/32} = \frac{5}{16}.$$

(c) Sia H_1 il numero di teste nelle prime tre monete e sia H_2 il numero di teste nelle ultime tre monete. Se X_i è l'indicatore di essere testa nella moneta i-esima abbiamo $H_1 = X_1+X_2+X_3$ e $H_1 = X_3+X_4+X_5$. Allora, usando $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=0$ per $i \neq j$,

$$\mathrm{Cov}(H_1,H_2) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}\mathrm{Cov}(X_i,X_j) = \mathrm{Cov}(X_3,X_3) = \mathrm{Var}(X_3) = \frac{1}{4}.$$

Nome:______________________________________

3. Gli arrivi di clienti in un ufficio seguono un processo di Poisson. Il numero medio è di 8 clienti all'ora tra le 8:00 e le 10:00, e di 16 clienti all'ora tra le 10:00 e le 12:00.

   Calcolare:

   a) il valore atteso del numero di clienti tra le 9:30 e le 10:30;
   b) la probabilità che arrivino esattamente 12 clienti tra le 9:30 e le 10:30;
   c) la probabilità che arrivino esattamente 12 clienti tra le 9:30 e le 10:30, sapendo che tra le 8:00 e le 12:00 ne sono arrivati in tutto 48.

Soluzione: Misuriamo il tempo in ore. Il tasso è 8 tra le 8:00 e le 10:00, e 16 tra le 10:00 e le 12:00.

a) Tra le 9:30 e le 10:30 abbiamo mezz'ora con tasso 8 e mezz'ora con tasso 16. Il valore atteso è quindi

$$8 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot \frac{1}{2} = 4 + 8 = 12.$$

b) Il numero di clienti in quell'intervallo è la somma di due variabili di Poisson indipendenti, una di parametro 4 e una di parametro 8. Dunque

$$N \sim \text{Poisson}(12),$$

e quindi

$$\mathbb{P}(N = 12) = e^{-12} \frac{12^{12}}{12!}.$$

c) Il numero medio totale tra le 8:00 e le 12:00 è

$$8 \cdot 2 + 16 \cdot 2 = 16 + 32 = 48.$$

Se Y indica il numero totale di arrivi tra le 8:00 e le 12:00, allora nell'intervallo 9:30–10:30 si hanno N arrivi, mentre nel resto dell'intervallo 8:00–12:00 si hanno $M = Y - N$ arrivi. Sappiamo che Y è variabile di Poisson di parametro 48. Inoltre N e M sono variabili di Poisson indipendenti, di parametro 12 e 36 rispettivamente. Allora

$$\mathbb{P}(N = 12 \mid Y = 48) = \frac{\mathbb{P}(N = 12)\mathbb{P}(M = 36)}{\mathbb{P}(Y = 48)} = \binom{48}{12} \left(\frac{1}{4}\right)^{12} \left(\frac{3}{4}\right)^{36}.$$

Possiamo notare inoltre che, condizionatamente all'evento $\{Y = 48\}$, N ha distribuzione binomiale con parametri 48 e 1/4: per ogni $k \in \{0, \ldots, 48\}$,

$$\mathbb{P}(N = k \mid Y = 48) = \frac{\mathbb{P}(N = k)\mathbb{P}(M = 48 - k)}{\mathbb{P}(Y = 48)} = \binom{48}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{48-k}.$$

Nome:____

4. In una competizione ogni giocatore sceglie una delle tre strategie A, B, C. Ogni scelta è indipendente e avviene con probabilità

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}.$$

Sia n il numero di giocatori. Nel limite $n \to \infty$, calcolare:

(a) la probabilità che la percentuale di giocatori che scelgono C superi il 30%;

(b) la probabilità che la percentuale di giocatori che scelgono A sia compresa fra il 45% e il 55%;

(c) la probabilità che il numero di giocatori che scelgono B superi quello di C.

Soluzione: Siano X_n, Y_n, Z_n rispettivamente il numero di giocatori che scelgono A, B, C.

(a) Per la legge dei grandi numeri, $Z_n/n \to 1/4$. Poiché $0.30 > 1/4$, si ha

$$\mathbb{P}\left(\frac{Z_n}{n} > 0.30\right) \to 0.$$

(b) Per la legge dei grandi numeri, $X_n/n \to 1/2$. Poiché $1/2 \in (0.45, 0.55)$,

$$\mathbb{P}\left(0.45 \leq \frac{X_n}{n} \leq 0.55\right) \to 1.$$

(c) Consideriamo

$$W_n = Y_n - Z_n.$$

Per ogni giocatore il contributo vale 1 se sceglie B, -1 se sceglie C, e 0 se sceglie A. Ha media

$$\mathbb{E}[W_1] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

e varianza

$$\mathbb{E}[W_1^2] = 1^2\frac{1}{4} + (-1)^2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Dunque W_n e la somma di n variabili indipendenti e identicamente distribuite, ciascuna con media zero e varianza $1/2$. Per il teorema del limite centrale,

$$\frac{W_n}{\sqrt{n/2}}$$

converge in distribuzione a una normale standard. Quindi, per simmetria del limite normale,

$$\mathbb{P}(Y_n > Z_n) = \mathbb{P}(W_n > 0) \to \frac{1}{2}.$$

Nome:____

5. Sia R una variabile aleatoria continua con densità

$$f(r) = \frac{1}{2} r^2 e^{-r} \, \mathbf{1}_{[0,\infty)}(r).$$

Sia Q_R il quadrato centrato nell'origine e di lato $2R$.

Calcolare:

(a) il valore atteso del perimetro di Q_R;

(b) il valore atteso dell'area di Q_R;

(c) la probabilità che Q_R contenga il disco di raggio 2 centrato nell'origine.

Soluzione: La densità è quella di una Gamma con parametri $\alpha = 3$ e $\lambda = 1$. Quindi

$$\mathbb{E}[R] = 3, \qquad \mathbb{E}[R^2] = 3 \cdot 4 = 12.$$

Possiamo alternativamente osservare che $R = X_1 + X_2 + X_3$ dove X_i sono esponenziali di parametro 1 indipendenti. Allora $\mathbb{E}[R] = 3\mathbb{E}[X_1] = 3$ e

$$\mathbb{E}[R^2] = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}[X_i^2] + \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2 + X_3] + \mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[X_1 + X_3] + \mathbb{E}[X_3]\mathbb{E}[(X_1 + X_2] = 3 \times 2 + 3 \times 2 = 12.$$

(a) Il perimetro è $P = 8R$. Dunque

$$\mathbb{E}[P] = 8\mathbb{E}[R] = 24.$$

(b) L'area è $A = (2R)^2 = 4R^2$. Dunque

$$\mathbb{E}[A] = 4\mathbb{E}[R^2] = 48.$$

(c) Il quadrato contiene il disco di raggio 2 se e solo se $R \geq 2$. Quindi

$$\mathbb{P}(R \geq 2) = \int_2^\infty \frac{1}{2} r^2 e^{-r} \, dr.$$

Usando integrazione per parti,

$$\int_a^\infty \frac{1}{2} r^2 e^{-r} \, dr = e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

Con $a = 2$ otteniamo

$$\mathbb{P}(R \geq 2) = e^{-2} \, (1 + 2 + 2) = 5e^{-2}.$$

Nome:______________________________________

6. Due amici, Anna e Paolo, aspettano un treno alla stazione alle 14:00. Il treno arriva in un tempo aleatorio distribuito uniformemente tra le 14:00 e le 15:00 e impiega 12 minuti per arrivare a destinazione. Anna prende sempre il treno, mentre Paolo decide che se il treno non è arrivato entro le 14:25 prenderà un autobus alternativo che parte subito e impiega 35 minuti.

   Calcolare:

   (a) il valore atteso dell'orario di arrivo di Anna;

   (b) il valore atteso dell'orario di arrivo di Paolo;

   (c) la probabilità che Paolo arrivi prima di Anna.

Soluzione: Sia $T \sim \mathrm{Unif}[0, 60]$ il tempo di arrivo del treno, misurato in minuti dopo le 14:00.

(a) Anna arriva dopo $T + 12$ minuti. Quindi

$$\mathbb{E}[T + 12] = 30 + 12 = 42.$$

In media Anna arriva alle 14:42.

(b) Paolo prende il treno se $T \leq 25$, e in quel caso arriva dopo $T + 12$ minuti. Se invece $T > 25$, prende l'autobus alle 14:25 e arriva dopo $25 + 35 = 60$ minuti, cioè alle 15:00. Pertanto, se X è il tempo di arrivo di Paolo dopo le 14:00,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{60} \int_0^{25} (t + 12)\, dt + 60 \cdot \frac{35}{60}.$$

Calcoliamo

$$\int_0^{25} (t + 12)\, dt = \left[\frac{t^2}{2} + 12t \right]_0^{25} = \frac{625}{2} + 300 = \frac{1225}{2}.$$

Dunque

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1225}{120} + 35 \approx 45.2\,.$$

In media Paolo arriva dopo circa 45.2 minuti, cioè poco dopo le 14:45.

(c) Se $T \leq 25$, Paolo e Anna prendono lo stesso treno e arrivano insieme. Se $T > 25$, Paolo arriva alle 15:00, mentre Anna arriva dopo $T + 12$ minuti. Paolo arriva prima di Anna se e solo se

$$60 < T + 12,$$

cioè se $T > 48$. Quindi

$$\mathbb{P}(\text{Paolo arriva prima di Anna}) = \mathbb{P}(T > 48) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}.$$

Nome:____