Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2009-2010, II semestre
8 luglio, 2010

CP110 Probabilità: Esame del 3 giugno 2010

Testo e soluzione

Nome:______________________________________

1. **(6 pts)** 12 monete da 1 euro vengono distribuite tra 4 persone in maniera tale che ognuno riceva almeno 1 euro. Supponendo che tutti gli esiti siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutti abbiano almeno 2 euro.

Soluzione: Se togliamo un euro per ciascuno abbiamo 8 monete da 1 euro da distribuire a caso tra quattro persone. Ricordiamo che il numero di modi di distribuire n palline indistinguibili in k buche è dato da $\binom{n+k-1}{k-1}$. Quindi, con $n = 8, k = 4$ il numero di esiti con almeno 1 euro ciascuno è $\binom{11}{3}$. Di questi dobbiamo selezionare il numero di esiti che hanno almeno 2 euro ciascuno. Quindi togliendo altri 4 euro si ha un totale di 4 euro da distribuire a caso. Usando la formula precedente con $n = 4$, $k = 4$, ci sono $\binom{7}{3}$ esiti con almeno due euro ciascuno. La risposta allora e'

$$\frac{\binom{7}{3}}{\binom{11}{3}}$$

Nome:____

2. **(6 pts)** Chiara prende l'automobile e sceglie a caso una tra le quattro strade differenti che portano da A a B. Supponiamo che 100 altre persone facciano la stessa cosa indipendentemente una dall'altra. Se la strada è vuota Chiara impiega 15 minuti per arrivare a destinazione. Per ogni automobile aggiuntiva sulla stessa strada il tempo aumenta di 2 minuti. Calcolare il valore atteso e la varianza del tempo percorrenza.

Soluzione: Sia X il tempo impiegato da Chiara. Sappiamo che $X = 15+2Y$, dove Y è il numero di automobili presenti sul suo stesso tragitto, e Y è una binomiale con parametri $n = 100$ e $p = 1/4$. Allora

$$E[X] = 15 + 2E[Y] = 15 + 2np = 65\,, \quad \mathrm{Var}[X] = 4\mathrm{Var}[Y] = 4np(1-p) = 75\,.$$

Nome:______________________________________

3. **(6 pts)** Si considerino n lanci indipendenti di una moneta equa e siano $X_1, \ldots, X_n$, con $X_i \in \{0,1\}$ i risultati dei lanci (1 per testa e 0 per croce). Sapendo che il numero totale di teste è k, dove $0 \leqslant k \leqslant n$ è un intero assegnato, trovare:

   a) la probabilità che $X_1 = 1$

   b) la densità congiunta di X_1, X_2.

   c) la covarianza di X_1, X_2

Soluzione: Sia $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ il numero di teste. Allora S_n è una binomiale di parametri n e $p = 1/2$.

a) Scrivendo $P(X_1 = 1 \,|\, S_n = k) = P(X_1 = 1\,;\; S_n = k)/P(S_n = k)$, si ha

$$P(X_1 = 1 \,|\, S_n = k) = \frac{P(X_1 = 1)P(S_{n-1} = k-1)}{P(S_n = k)} = \frac{\frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}2^{-(n-1)}}{\binom{n}{k}2^{-n}} = \frac{k}{n}\,.$$

b) Sia $p(i,j) = P(X_1 = i, X_2 = j \,|\, S_n = k)$, per $i, j \in \{0,1\}$. Abbiamo

$$p(0,0) = \frac{P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)P(S_{n-2} = k)}{P(S_n = k)} = \frac{\frac{1}{4}\binom{n-2}{k}2^{-(n-2)}}{\binom{n}{k}2^{-n}} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}$$

In maniera analoga si calcolano

$$p(0,1) = p(1,0) = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}\,, \quad p(1,1) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}\,.$$

c) La covarianza è data da

$$\begin{aligned} &P(X_1 = 1, X_2 = 1 \,|\, S_n = k) - P(X_1 = 1 \,|\, S_n = k)P(X_2 = 1 \,|\, S_n = k) \\ &= p(1,1) - (k/n)^2 = -\frac{k(n-k)}{n^2(n-1)}\,. \end{aligned}$$

Nome:____

4. **(6 pts)** Due dadi vengono lanciati insieme ripetutamente. Sia X il numero di lanci necessari per avere almeno una delle due facce uguale a 6, e sia Y il numero di lanci necessari per avere almeno una delle due facce uguale a 1.

   a) Calcolare $E[X], E[Y]$.

   b) Calcolare $P[X = Y]$.

Soluzione: Sia p_X la probabilità che in un lancio dei due dadi si abbiamo almeno una faccia uguale a 6. Allora $p_X = 1 - (5/6)^2 = 11/36$. Quindi X è una geometrica di parametro p_X. Analogamente Y è una geometrica di parametro $p_Y = p_X = 11/36$. Ne segue che

$$E[X] = E[Y] = 36/11\,.$$

Per calcolare $P(X = Y)$ osserviamo che

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = Y = k)\,.$$

Inoltre $X = Y = k$ significa che per i primi $k - 1$ lanci dei due dadi non si è mai ottenuto né 6 né 1, mentre al k-esimo lancio si è ottenuto 6 e 1. La probabilità di ottenere né 6 né 1 in un lancio dei due dadi è $(4/6)^2 = 4/9$. La probabilità di ottenere 6 e 1 in un lancio dei due dadi è $2/36 = 1/18$. Quindi si ha

$$P(X = Y = k) = (4/9)^{k-1} \times 1/18\,.$$

Sommando su k:

$$P(X = Y) = (1 - (4/9))^{-1} \times 1/18 = 2/5\,.$$

Nome:____

5. **(6 pts)** Sia N il numero di persone che votano in una data sezione elettorale. Si assuma che N sia una variabile di Poisson con valore medio $\lambda > 0$. Si assuma inoltre che ognuno, indipendentemente dagli altri, voti per il candidato A con probabilità $0 < p < 1$. Determinare la distribuzione del numero di voti N_A raccolti dal candidato A nella data sezione elettorale. Calcolare inoltre il valore atteso e la varianza di N_A.

Soluzione: Condizionatamente all'evento $N = n$, abbiamo che N_A è binomiale di parametri n e p. Quindi

$$P(N_A = k) = \sum_{n \geqslant k} P(N = n)P(N_A = k \mid N = n) = e^{-\lambda} \sum_{n \geqslant k} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} .$$

Semplificando e osservando che $\sum_{n \geqslant k} \lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}/(n-k)! = e^{\lambda(1-p)}$ si ha

$$P(N_A = k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} ,$$

quindi N_A è una variabile di Poisson di parametro λp. In particolare,

$$E[N_A] = \mathrm{Var}[N_A] = \lambda p .$$

Nome:____

6. **(6 pts)** Siano $Z_1, \dots, Z_n$ copie indipendenti della variabile normale standard, e sia

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \, .$$

a) Fornire un valore approssimato (per n grandi) della probabilità dell'evento $\{X_n \geqslant n\}$.

b) Calcolare la distribuzione di X_n per ogni n.

Soluzione:

a) Notiamo che $E[X_n] = n\, E[Z_1^2] = n$. Quindi per il teorema del limite centrale si ha

$$\mathbb{P}(X_n \geqslant n) = \mathbb{P}\Big(\frac{X_n - E[X_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_n)}} \geqslant 0\Big) \approx \frac{1}{2} \, .$$

b) Calcoliamo la distribuzione di Z_1^2. Per $t > 0$:

$$P(Z_1^2 \leqslant t) = \Phi(\sqrt{t}) - \Phi(-\sqrt{t}) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}\, dz$$

Derivando rispetto a t, usando $\varphi(z) = \varphi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2} = \Phi'(z)$, si ottiene che Z_1^2 ha densità

$$f(t) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{t}} \varphi(\sqrt{t}) 1_{t\,\geqslant\,0} = \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}\sqrt{2\pi}}\, 1_{t\,\geqslant\,0} \, .$$

Quindi, ricordando che la variabile $\Gamma(\alpha, \lambda)$ ha densità

$$\frac{\lambda^{\alpha} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}\, 1_{t\,\geqslant\,0} \, , \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz \, ,$$

si vede che Z_1^2 è distribuita come $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Allora X_n ha distribuzione $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ (questo si vede facilmente per es. usando la funzione generatrice dei momenti).