Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2016-17, II semestre
20 luglio, 2017

CP110 Probabilità: esame del 20 luglio 2017

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si puo' usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato sotto. Notare che già con 5 esercizi risolti correttamente si arriva al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome:____

1. Da un mazzo di 52 carte francesi ben mischiato si estraggono 3 carte. Calcolare la probabilità di ottenere k assi, $k = 0, 1, 2, 3$.

Soluzione: Probabilità di ottenere 3 assi:

$$\frac{\binom{4}{3}}{\binom{52}{3}}.$$

Probabilità di ottenere 2 assi:

$$\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{1}}{\binom{52}{3}}.$$

Probabilità di ottenere 1 asso:

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{48}{2}}{\binom{52}{3}}.$$

Probabilità di ottenere 0 assi:

$$\frac{\binom{4}{0}\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}}.$$

Nome:______________________________________

2. Supponiamo di sapere che un dato gruppo di n persone ha la seguente proprietà: ogni coppia di persone si conosce, indipendentemente dalle altre, con probabilità $\frac{1}{2}$. Consideriamo due persone A e B in questo gruppo. Calcolare, in funzione di n:

   (a) la probabilità che A non abbia amici

   (b) il numero medio di amici di B

   (c) la covarianza tra il numero di amici di A e il numero di amici di B

Soluzione: La persona A appartiene a $n-1$ coppie di persone (una per ogni persona diversa da A) e dunque l'evento $\{A \text{ non ha amici}\}$ ha probabilità

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

B appartiene a $n-1$ coppie di persone, e dunque il numero medio di conoscenze è

$$\frac{n-1}{2}.$$

Sia X il numero di amici di A, e Y il numero di amici di B. Numeriamo da 1 a n le persone nel gruppo. Senza perdere generalità possiamo supporre che $A = 1$ e $B = 2$. Sia $X_i \in \{0, 1\}$ l'indicatore dell'amicizia tra la persona 1 e la persona i, dove $i = 1, \ldots, n$. Allo stesso modo sia $Y_i \in \{0, 1\}$ l'indicatore dell'amicizia tra la persona B e la persona $i = 1, \ldots, n$. Notiamo che $X_2 = Y_1$. Se poniamo $X_1 = 0$ e $Y_2 = 0$ si ha

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_2 + \sum_{i=3}^{n} X_i\,, \qquad Y = Y_1 + \sum_{i=3}^{n} Y_i$$

Allora per linearità si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= \mathrm{Cov}(X_2, Y_1) + \\ &+ \sum_{i=3}^{n} \mathrm{Cov}(X_2, Y_j) + \sum_{i=3}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, Y_1) + \sum_{i,j=3}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j). \end{aligned}$$

Notiamo che per l'indipendenza tutti i termini nel membro di destra sono nulli tranne

$$\mathrm{Cov}(X_2, Y_1) = \mathrm{Cov}(Y_1, Y_1) = \mathrm{Var}(Y_1) = \frac{1}{4}.$$

Nome:______________________________________

3. La scatola A contiene 5 palline blu e una verde, la scatola B contiene 1 pallina blu e 3 verdi, la scatola C contiene una pallina blu. Si sceglie una scatola a caso, e si estrae una pallina dalla scatola scelta.

   (a) Sapendo che la pallina estratta è blu, calcolare la probabilità che la scatola da cui proviene sia la C.

   (b) Sapendo che la scatola scelta non sia la C, calcolare la probabilità di avere una pallina verde.

   (c) Se l'obiettivo è massimizzare la probabilità di estrarre una pallina verde, quale delle due strategie seguenti conviene adottare: 1) aggiungiamo una pallina verde a ogni scatola; 2) togliamo una pallina blu da ogni scatola ?

Soluzione: a. Calcoliamo la probab. di estrarre una pallina blu:

$$\mathbb{P}(\text{blu}) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\text{blu}|A) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\text{blu}|B) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(\text{blu}|C) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{25}{36}. \qquad (1)$$

Allora la probab. richiesta vale

$$\mathbb{P}(C|\text{blu}) = \mathbb{P}(\text{blu}|C)\frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(\text{blu})} = 1 \times \frac{\frac{1}{3}}{\frac{25}{36}} = \frac{12}{25}$$

b. La probab. richiesta vale

$$\mathbb{P}(\text{verde}|A \cup B) = \frac{\mathbb{P}(\text{verde} \cap \{A \cup B\})}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}(\text{verde}) - \mathbb{P}(\text{verde} \cap C)}{1 - \mathbb{P}(C)}.$$

Inoltre $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(\text{verde}) = 1 - \mathbb{P}(\text{blu}) = \frac{11}{36}$, e

$$\mathbb{P}(\text{verde} \cap C) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(\text{verde}|C) = 0.$$

In conclusione

$$\mathbb{P}(\text{verde}|A \cup B) = \frac{11}{24}.$$

c. Nel primo caso si ha

$$\mathbb{P}(\text{verde}) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{7} + \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{37}{70}.$$

Nel secondo caso si ottiene

$$\mathbb{P}(\text{verde}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} + 1 + 0\right) = \frac{2}{5}.$$

Poiché $\frac{2}{5} = \frac{28}{70} < \frac{37}{70}$ sceglieremo la prima strategia.

Nome:____

4. Sia $P = (X, Y)$ un punto del piano scelto uniformemente a caso nella regione

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leqslant x \leqslant 1, \ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant -x^2 + 1\}.$$

Calcolare:

(a) la probabilità che $X \geqslant 0$

(b) il valore atteso di X^2

(c) la varianza di X

Soluzione: Notiamo che la regione $\mathcal{D}$ rappresenta la porzione di piano tra le due parabole $x^2 - 1$ e $-x^2 + 1$. In particolare $\mathcal{D}$ è simmetrica nelle due variabili (x, y), e pertanto si deve avere $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$. Per una derivazione piu' formale possiamo procedere come segue.
Calcoliamo la densità di probabilità marginale di X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dy \,,$$

dove $f_{(X,Y)}$ è la legge congiunta di (X, Y). Per ipotesi (X, Y) è uniforme in $\mathcal{D}$ e dunque si ha

$$f_{(X,Y)}(x, y) = c \times \mathbf{1}((x, y) \in \mathcal{D}),$$

dove c è la costante tale che $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f_{(X,Y)}(x, y) = 1$. Calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \mathbf{1}((x, y) \in \mathcal{D}) = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2-1}^{-x^2+1} dy = \int_{-1}^{1} dx (2 - 2x^2) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Allora $c = \frac{3}{8}$. Dunque

$$f_X(x) = \frac{3}{8} \int_{x^2-1}^{-x^2+1} dy = \frac{3}{4}(1 - x^2) \,, \qquad x \in [-1, 1].$$

Poiché f_X è simmetrica si ha $\mathbb{E}[X] = 0$ e $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$. Inoltre

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathrm{Var}(X) = \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} x^2 (1 - x^2) dx = \frac{1}{5}.$$

Nome:______________________________________

5. Consideriamo una scacchiera con 8×8 caselle. Inizialmente è vuota. A ogni passo, indipendentemente, si sceglie una casella a caso. Se la casella scelta è libera, allora viene occupata da una nuova pedina, mentre se la casella scelta è già occupata si procede al passo successivo.
   (a) Sia X_n il numero di caselle occupate dopo n passi. Calcolare $\mathbb{P}(X_{n+1} = 5|X_n = 4)$.
   (b) Calcolare il numero medio di passi per avere due caselle occupate per la prima volta.
   (c) Scrivere una formula per il numero medio di passi per occupare tutta la scacchiera per la prima volta.

Soluzione:
Il problema è del tutto analogo al problema della raccolta di figurine.
a. Se $X_n = 4$, allora ci sono 60 caselle libere e dunque la probab. di ottenere una nuova casella al passo successivo è

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 5|X_n = 4) = \frac{60}{64}$$

b. Notiamo che al passo 1 necessariamente occupiamo una delle 64 caselle. Supponiamo che sia la casella x. Al passo 2 con probab. $1/64$ scegliamo la casella x e quindi non riusciamo a occupare una nuova casella. Con probab. $63/64$ invece scegliamo una nuova e quindi finiamo per occupare 2 caselle. Allora vediamo che oltre al passo 1, il numero di passi per occupare una nuova casella è una variabile geometrica di parametro $p = 63/64$. Dunque il numero medio di passi per occupare due caselle è

$$1 + \frac{1}{p} = 1 + \frac{64}{63} = \frac{127}{63}$$

c. Il numero di passi per coprire la scacchiera si puó scrivere come somme di: tempo per coprire una casella, tempo per passare da una casella coperta a due caselle coperte, etc. Dunque è una somma di variabili geometriche di parametro $p_i = \frac{64-i+1}{64}$, $i = 1, \ldots, 64$. Allora il numero medio di passi è

$$\sum_{i=1}^{64} \frac{64}{64 - i + 1} = 64 \sum_{i=1}^{64} \frac{1}{i}$$

Nome:______________________________________

6. Un dado viene lanciato ripetutamente. Consideriamo gli eventi

$$A_1 = \{\text{almeno 11 volte 6 nei primi 36 lanci}\}$$
$$A_2 = \{\text{almeno 17 volte 6 nei primi 72 lanci}\}$$
$$A_3 = \{\text{almeno 35 volte 6 nei primi 180 lanci}\}$$

Utilizzando l'approssiamzione normale, ordinare gli eventi precedenti secondo le loro probabilità.

Soluzione: Sia X_k il numero di 6 nei primi k lanci. Allora X_k è una binomiale di parametri $k, \frac{1}{6}$. La media di X_k è $k/6$, la varianza di X_k è $\frac{1}{6}\frac{5}{6}k = 5k/36$. Per l'approssimazione normale sappiamo che la variabile

$$Z_k = \frac{X_k - \frac{k}{6}}{\sqrt{5k/36}}$$

soddisfa (per k grande)

$$\mathbb{P}(Z_k \geqslant t) \approx 1 - \Phi(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Se $k = 36$, allora $A_1 = \{X_{36} \geqslant 11\}$ equivale a $\{Z_{36} \geqslant \frac{5}{\sqrt{5}}\}$. Se $k = 72$, $A_2 = \{X_{72} \geqslant 17\}$ equivale a $\{Z_{72} \geqslant \frac{5}{\sqrt{10}}\}$. Se $k = 180$, $A_3 = \{X_{180} \geqslant 35\}$ equivale a $\{Z_{180} \geqslant 1\}$. Essendo Φ monotona e essendo $\frac{5}{\sqrt{5}} > \frac{5}{\sqrt{10}} > 1$, si ha

$$\mathbb{P}(A_3) > \mathbb{P}(A_2) > \mathbb{P}(A_1).$$