Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2019-20, II semestre
30 giugno, 2020

CP210 Introduzione alla Probabilità: Esame 2

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Codice etico: Durante la prova d'esame la studentessa/lo studente:

1. non si avvale di alcun ausilio o supporto esterno, cartaceo o elettronico (es.: manuali, dispense, fogli propri, libri, pubblicazioni, telefoni cellulari, computer o altri dispositivi elettronici) che non siano penna e fogli o tablet per scrivere (è ammesso l'uso di un semplice calcolatore);
2. non copia né osserva le prove di altri candidati;
3. non contatta o tenta di contattare in alcun modo altre persone.

Firma

....

Modalità di esame:

1. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
2. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
3. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che con cinque esercizi risolti correttamente si arriva al trenta.
4. Al termine della prova, consegnate il compito facendo un upload sulla piattaforma come indicato dal docente.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome:____

1. **(6 punti)** Un'urna contiene 6 palline, 3 rosse e 3 nere. Lanciamo un dado e poi estraiamo (senza rimpiazzo) un numero di palline uguale alla faccia del dado lanciato. Calcolare:

   (a) la probabilità di ottenere 2 palline nere e 2 rosse;

   (b) la probabilità che tra le palline estratte ce ne siano 2 nere;

   (c) sapendo che le palline nere sono 2, qual è la probabilità di aver ottenuto 4 nel lancio del dado ?

Soluzione:

a). Per avere esattamente 2 palline nere e 2 rosse il dado deve essere 4. Se estraiamo 4 palline ci sono $\binom{6}{4}$ possibili esiti e di questi $\binom{3}{2} \times \binom{3}{2}$ hanno 2 palline nere e 2 palline rosse. Dunque

$$P(2 \text{ rosse e } 2 \text{ nere}) = P(\text{dado} = 4) \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{2}}{\binom{6}{4}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{10}.$$

b). Sia Y la faccia del dado. Allora se X è il numero delle palline nere, si ha

$$P(X = k) = \sum_{j=1}^{6} P(Y = j) P(X = k | Y = j).$$

Nel caso $k = 2$, si ha $P(X = 2 | Y = j) = 0$ se $j < 2$ oppure $j = 6$ e otteniamo

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \frac{1}{6} \sum_{j=2}^{6} P(X = 2 | Y = j) = \frac{1}{6} \sum_{j=2}^{5} \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{j-2}}{\binom{6}{j}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{5} \frac{\binom{3}{j-2}}{\binom{6}{j}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\binom{6}{2}^{-1} + 3\binom{6}{3}^{-1} + 3\binom{6}{4}^{-1} + \binom{6}{5}^{-1} \right) = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

c). Se $A = \{2 \text{ nere}\}$, $B = \{\text{dado} = 4\}$ si ha

$$P(\text{dado} = 4 \,|\, 2 \text{ nere}) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(2 \text{ rosse e } 2 \text{ nere})}{P(X = 2)} = \frac{1/10}{7/24} = \frac{12}{35}.$$

Nome:____

2. **(6 punti)** Consideriamo un gioco in cui a ogni passo i giocatori A e B lanciano un dado ciascuno. Vince il giocatore che realizza per primo un 6, ma se in quel lancio entrambi i giocatori hanno realizzato 6 allora si continua fino al prossimo 6 (ossia il gioco termina al primo passo in cui si ha un solo 6 tra i due dadi). Calcolare:

   (a) la probabilità che il gioco termini al primo passo;

   (b) la probabilità condizionata che il gioco termini al primo passo sapendo che ha vinto il giocatore A;

   (c) il numero medio di passi effettuati.

Soluzione: (a). La probabilità di avere un solo 6 in due lanci vale $p = 10/36$. Dunque il numero di passi effettuati X è una geometrica di parametro $p = 10/36$. Allora

$$P(X = 1) = p = \frac{10}{36} \approx 0.28$$

(b). Se A rappresenta l'evento che ha vinto il giocatore A, vogliamo calcolare

$$P(X = 1|A) = \frac{P(X = 1, A)}{P(A)} = \frac{5/36}{P(A)}\,,$$

dove usiamo il fatto che la probabilità che A vinca al primo passo è la probabilità di avere, nel primo passo, 6 per il giocatore A e qualsiasi faccia tranne 6 per il giocatore B, che vale 5/36. Ora, per simmetria si ha $P(A) = 1/2$ e dunque

$$P(X = 1|A) = \frac{10}{36}\,.$$

In effetti si può mostrare che $P(X = k|A) = P(X = k)$ per ogni k, ossia la variabile X è indipendente da quale giocatore vince.

(c). Il valore atteso della geometrica X vale

$$E[X] = \frac{1}{p} = 3.6$$

Nome:_______________________________________

3. **(6 punti)** Supponiamo che la pioggia caduta in un mese a Rio de Janeiro sia una variabile aleatoria con media 100mm e varianza 3000. Supponendo che le quantità di acqua caduta in mesi differenti siano indipendenti e identicamente distribuite, si consideri la probabilità che la pioggia caduta in 10 anni superi 13200mm:

   (a) fornire una stima dall'alto usando la disuguaglianza di Chebyshev;

   (b) calcolare un valore approssimato usando il teorema del limite centrale.

Soluzione:

a). Sia X_i la quantità di pioggia caduta nel mese i. Allora le X_i sono indipendenti con

$$E[X_i] = 100, \qquad \mathrm{Var}[X_i] = 3000.$$

Scriviamo $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ per la pioggia caduta in n mesi. Abbiamo

$$E[S_n] = 100n, \qquad \mathrm{Var}[S_n] = 3000n.$$

Per la disuguaglianza di Chebyshev abbiamo

$$P(S_n > E[S_n] + t) \leqslant P(|S_n - E[S_n]| > t) \leqslant \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{t^2} = \frac{3000n}{t^2}.$$

Per 10 anni abbiamo $n = 120$ e dunque $E[S_n] = 12000$ e $\mathrm{Var}[S_n] = 360000$. Dunque ponendo $t = 1200$ si ha

$$P(S_{120} > 13200) \leqslant \frac{360000}{1440000} = \frac{1}{4}.$$

b). Per il teorema del limite centrale $Z_n = (S_n - E[S_n])/\sqrt{\mathrm{Var}[S_n]}$ è approssimata da una normale standard per n grandi. Ponendo $n = 120$ e $t = 1200$ abbiamo $t/\sqrt{\mathrm{Var}[S_n]} = 2$ e dunque

$$P(S_{120} > 13200) = P(Z_n > 2) \approx 1 - \Phi(2) \approx 0.02.$$

Dunque in questo caso la stima di Chebyshev è poco accurata.

Nome:____

4. **(6 punti)** Siano X e Y due variabili aleatorie continue con densità di probabilità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,\sqrt{xy}\,e^{-x-2y} & \text{se } x \geqslant 0 \text{ e } y \geqslant 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove c è una costante.

(a) Dire se X, Y sono indipendenti e calcolare c.

(b) Calcolare il valore atteso del prodotto XY.

(c) Calcolare la media e la varianza della variabile $Z = X - Y$.

Soluzione:

a). Le variabili sono indipendenti poiché f ha la forma $f(x,y) = g(x)h(y)$, con

$$g(x) = c\sqrt{x}\,e^{-x}\mathbf{1}(x \geqslant 0), \quad h(y) = \sqrt{y}\,e^{-2y}\mathbf{1}(y \geqslant 0).$$

Inoltre notiamo che g è, a meno della costante moltiplicativa, la densità di una variabile $\Gamma(\alpha,\lambda)$ di parametri $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\lambda = 1$, mentre h è, a meno della costante moltiplicativa, la densità di una variabile $\Gamma(\alpha,\lambda)$ di parametri $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\lambda = 2$. Dunque si deve avere

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\,, \qquad f_X(x) = \frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{\Gamma(\frac{3}{2})}\mathbf{1}(x \geqslant 0)\,, \quad f_Y(y) = \frac{\sqrt{8}\sqrt{y}\,e^{-2y}}{\Gamma(\frac{3}{2})}\mathbf{1}(y \geqslant 0),$$

ossia X è una $\Gamma(\frac{3}{2}, 1)$ e Y è una $\Gamma(\frac{3}{2}, 2)$. Ricordando che $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ otteniamo

$$c = \frac{\sqrt{8}}{\Gamma(\frac{3}{2})^2} = 8\frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

b). Si ha

$$E[XY] = E[X]E[Y] = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{8},$$

dove abbiamo usato l'indipendenza e il fatto che il valore atteso di una $\Gamma(\alpha,\lambda)$ è $\frac{\alpha}{\lambda}$.

c). La media di $X - Y$ vale

$$E[X-Y] = E[X] - E[Y] = \frac{3}{4}.$$

Per il valore atteso di $(X-Y)^2$, ricordando che il momento secondo di una $\Gamma(\alpha,\lambda)$ è $\frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2}$, troviamo

$$E[(X-Y)^2] = E[X^2] + E[Y^2] - 2E[XY] = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{3}{8} + \frac{9}{16} - \frac{9}{4} = \frac{39}{16}$$

Allora la varianza vale

$$\mathrm{Var}[X-Y] = E[(X-Y)^2] - E[(X-Y)]^2 = \frac{15}{8}.$$

Nome:______________________________________

5. **(6 punti)** Una citta è attraversata da un fiume, e un ponte pedonale collega la riva sinistra (A) a quella destra (B). Supponiamo che gli attraversamenti del ponte nel senso $A \mapsto B$ e nel senso $B \mapsto A$ avvengano secondo due processi di Poisson indipendenti con media 60 ogni ora ciscuno. Calcolare:

   (a) Il numero medio di attraversamenti $A \mapsto B$ tra le 8:00 e le 8:10 e il numero medio di attraversamenti $B \mapsto A$ tra le 8:00 e le 8:10.

   (b) La probabilità di avere almeno 2 attraversamenti $A \mapsto B$ e meno di 2 attraversamenti $B \mapsto A$ tra le 8:00 e le 8:02.

   (c) La probabilità condizionata di avere esattamente 2 attraversamenti $A \mapsto B$ e 2 attraversamenti $B \mapsto A$ tra le 8:00 e le 8:02 sapendo che tra le 8:00 e le 8:10 ci sono almeno 2 attraversamenti $A \mapsto B$ e almeno 2 attraversamenti $B \mapsto A$.

Soluzione: (a). Il numero di attraversamenti $A \mapsto B$ tra le 8:00 e le 8:10 e il numero di attraversamenti $B \mapsto A$ tra le 8:00 e le 8:10 sono entrambe v.a. di Poisson di parametro 10 e dunque il loro valor medio è 10.

(b). Sia N_{AB} il numero di attraversamenti $A \mapsto B$ tra le 8:00 e le 8:02 e sia N_{BA} il numero di attraversamenti $B \mapsto A$ tra le 8:00 e le 8:02. Allora N_{AB}, N_{BA} sono v.a. indipendenti di Poisson di parametro 2. Dunque

$$\begin{aligned} P(N_{AB} \geqslant 2, N_{BA} < 2) &= P(N_{AB} \geqslant 2)P(N_{BA} < 2) \\ &= (1 - P(N_{AB} < 2))P(N_{BA} < 2) = (1 - e^{-2} - 2e^{-2})(e^{-2} + 2e^{-2}) \approx 0.24 \end{aligned}$$

(c). Siano N_{AB} e N_{BA} come sopra, e siano N'_{AB}, N'_{BA} le v.a. corrispondenti nell'intervallo di tempo $[8:00, 8:10]$. Allora la probabilità richiesta vale

$$\begin{aligned} P(N_{AB} = 2, N_{BA} = 2 | N'_{AB} \geqslant 2, N'_{BA} \geqslant 2) &= \frac{P(N_{AB} = 2, N_{BA} = 2, N'_{AB} \geqslant 2, N'_{BA} \geqslant 2)}{P(N'_{AB} \geqslant 2, N'_{BA} \geqslant 2)} \\ &= \frac{P(N_{AB} = 2, N_{BA} = 2)}{P(N'_{AB} \geqslant 2)P(N'_{BA} \geqslant 2)} \\ &= \frac{P(N_{AB} = 2)^2}{P(N'_{AB} \geqslant 2)^2} = \left(\frac{\frac{1}{2} 2^2 e^{-2}}{1 - e^{-10} - 10e^{-10}} \right)^2 \approx 0.07. \end{aligned}$$

Nome:____

6. **(6 punti)** X e Y sono due punti scelti a caso uniformemente nell'intervallo $[0,1]$. Supponendo X, Y indipendenti, calcolare

   (a) Il valore atteso di $(X-Y)^2$;

   (b) Il valore atteso di $|X-Y|$;

   (c) la probabilità che $|X-Y| > \frac{1}{2}$.

Soluzione:

(a). Scriviamo

$$\begin{aligned} E[(X-Y)^2] &= E[X^2] + E[Y^2] - 2E[XY] \\ &= E[X^2] + E[Y^2] - 2E[X]E[Y] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(b). La densità congiunta di X, Y è $f(x,y) = \mathbf{1}(x \in [0,1])\mathbf{1}(y \in [0,1])$ e dunque

$$\begin{aligned} E[|X-Y|] &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy |x-y| = \int_0^1 dx \int_0^x dy (x-y) + \int_0^1 dx \int_x^1 dy (y-x) \\ &= \int_0^1 \frac{x^2}{2}\, dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} - x(1-x) \right) dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(c). Scriviamo

$$\begin{aligned} P(|X-Y| > \tfrac{1}{2}) &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy\, \mathbf{1}(|x-y| > \tfrac{1}{2}) \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy\, \mathbf{1}(x-y > \tfrac{1}{2}) + \int_0^1 dx \int_0^1 dy\, \mathbf{1}(y-x > \tfrac{1}{2}) \\ &= 2\int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^{x-\frac{1}{2}} dy = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 (x - \tfrac{1}{2}) dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Nome:____