Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2020-21, II semestre
6 luglio, 2021

CP210 Introduzione alla Probabilità: Esame 2

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si può usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome:______________________________________

1. **(6 punti)** Estraiamo a caso una alla volta, senza rimpiazzo, 5 palline da un'urna contenente 8 palline, di cui 5 nere e 3 bianche. Calcolare:

   (a) la probabilità che siano tutte nere;

   (b) la probabilità condizionata che la terza sia nera sapendo che la prima è nera.

Soluzione:

a). Ci sono $\binom{8}{5}$ possibili estrazioni (non ordinate), tra cui una sola è composta tutta da palline nere. Dunque la probabilità vale

$$\frac{1}{\binom{8}{5}} = \frac{1}{56}.$$

b). Sia A_i l'evento "nera alla i-esima estrazione", $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Allora

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= \frac{5}{8} \\
P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3), \\
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{5}{28}, \\
P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2^c|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2^c) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{5}{28}.
\end{aligned}$$

Dunque

$$P(A_3|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_3)}{P(A_1)} = \frac{\frac{5}{28} + \frac{5}{28}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{7}.$$

Nome:____

2. **(6 punti)** Consideriamo una passeggiata aleatoria con incrementi $+1$ con probabilità $3/4$ e -1 con probabilità $1/4$ con partenza nell'origine, e sia S_n la posizione dopo n passi. Calcolare:

   (a) il valore atteso di S_n per ogni $n \in \mathbb{N}$;

   (b) la probabilità dell'evento $S_n = k$ per ogni $k, n \in \mathbb{N}$;

   (c) un valore approssimato della probabilità dell'evento $S_n > n/4$ per n grandi.

Soluzione: (a). Poiché ogni passo ha media $1/2$ si ha $E[S_n] = n/2$.

(b). Scriviamo $S_n = N_+ - N_- = 2N_+ - n$ dove N_+ è il numero di passi a destra e $N_- = n - N_+$ è il numero di passi a sinistra. Allora

$$P(S_n = k) = P(N_+ = (k+n)/2).$$

In particolare, abbiamo $P(S_n = k) = 0$ se $k + n$ è dispari. Se invece $k + n$ è pari, poiché N_+ è binomiale di parametri n e $3/4$ si ha

$$P(S_n = k) = \binom{n}{\frac{k+n}{2}} (\tfrac{3}{4})^{\frac{k+n}{2}} (\tfrac{1}{4})^{\frac{k-n}{2}}$$

(c). Notiamo che $P(S_n > n/4) = 1 - P(S_n \leqslant n/4)$ e $S_n \leqslant n/4$ implica $|S_n - E[S_n]| > n/4$. Allora per la LGN si ha

$$P(S_n \leqslant n/4) \leqslant P(|S_n - E[S_n]| > n/4) \to 0,$$

per $n \to \infty$. Dunque $P(S_n > n/4) \approx 1$ per n grandi.

Nome:____

3. **(6 punti)** Lanciamo ripetutamente un dado. Sia T_k il numero di lanci necessario per ottenere per la k-esima volta 6. Calcolare

   (a) la probabilità dell'evento $T_k = n$ per ogni $k, n \in \mathbb{N}$;

   (b) il valore atteso di T_k per ogni $k \in \mathbb{N}$;

   (c) la varianza di T_k per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Soluzione:

(a). L'evento $T_k = n$ significa che nei primi $n-1$ lancia abbiamo avuto esattamente $k-1$ volte 6 e che al n-esimo lancio si ha 6. Notiamo che questa probabilità è zero se $n < k$. Per ogni $n \geqslant k$ si ha:

$$P(T_k = n) = \binom{n-1}{k-1} (\tfrac{1}{6})^{k-1} (\tfrac{5}{6})^{n-k} \times \tfrac{1}{6} = \binom{n-1}{k-1} (\tfrac{1}{6})^{k} (\tfrac{5}{6})^{n-k}.$$

(b). Si può fare il calcolo esplicito di $\sum_{n \geqslant k} nP(T_k = n)$. Piú semplice osservare che T_k è la somma di k variabili geometriche di parametro $1/6$ ciascuna e dunque

$$E[T_k] = \frac{k}{6}.$$

(c). Essendo T_k la somma di k variabili geometriche indipendenti di parametro $1/6$ si ha

$$\mathrm{Var}[T_k] = k \times \frac{5/6}{(1/6)^2} = 30k.$$

Nome:____

4. **(6 punti)** Siano X, Y due variabili indipendenti con distribuzione uniforme in $[-1, 1]$. Calcolare:

   (a) la probabilità dell'evento $Y \leqslant 2X$;

   (b) la probabilità dell'evento $Y \leqslant X^2$;

Soluzione:

a). La densità congiunta di (X, Y) è $f(x,y) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{(x,y)\in[-1,1]^2\}}$. Si ha

$$\begin{aligned}
P(Y \leqslant 2X) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{y \leqslant 2x\}} f(x,y)dxdy \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1/2}^{1} dx \int_{-1}^{\min\{2x,1\}} dy \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1/2}^{1/2}(2x+1)dx + \frac{1}{4}\int_{1/2}^{1} 2dx \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

b). Ragionando come sopra

$$\begin{aligned}
P(Y \leqslant X^2) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{y \leqslant x^2\}} f(x,y)dxdy \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{x^2} dy \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Nome:____

5. **(6 punti)** Supponiamo che gli errori di stampa siano descritti da un processo di Poisson con in media 0.01 errore per pagina. Calcolare:

   (a) la probabilità che un libro di 200 pagine contenga almeno 3 errori di stampa;

   (b) la probabilità condizionata che le ultime 50 pagine contengano almeno un errore di stampa sapendo che nelle prime 50 pagine non ci sono errori.

Soluzione: (a). Il numero N di errori su 200 pagine è una variabile di Poisson di parametro $\lambda = 200 \times 0.01 = 2$ e dunque

$$P(N \geqslant 3) = 1 - P(N \leqslant 2) = 1 - e^{-2} - 2e^{-2} - \frac{4e^{-2}}{2} = 1 - 5e^{-2}.$$

(b). Il numero di errori nelle ultime 50 pagine è indipendente dal numero di errori nelle prime 50 pagine, ed è descritto da una variabile di Poisson di parametro $50 \times 0.01 = 1/2$. Allora la probabilità richiesta vale

$$1 - e^{-1/2}.$$

Nome:____________________________________

6. **(6 punti)** Sia (X, Y) un punto scelto a caso in $\mathbb{R}^2$ in modo che X e Y sono variabili aleatorie continue con densità congiunta

$$f(x, y) = c\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+2x+y^2)}.$$

(a) Dire se X e Y sono indipendenti;

(b) calcolare il valore atteso di $XY + Y^2$;

(c) calcolare la probabilità che il punto (X, Y) cada fuori dal disco di raggio 1 centrato nel punto $(-1, 0)$.

Soluzione:

(a). La densità congiunta è di tipo prodotto, dunque le variabili sono indipendenti. Inoltre si vedere che

$$f(x, y) = c\,\sqrt{e}\, e^{-\frac{1}{2}(x+1)^2} e^{-\frac{1}{2}y^2},$$

da cui riconosciamo che X è una normale $N(-1, 1)$ e Y è una normale $N(0, 1)$. La condizione $\int\int f(x, y)dxdy = 1$ impone dunque

$$c = \frac{1}{2\pi\sqrt{e}}.$$

(b). Si ha $E[XY + Y^2] = E[X]E[Y] + E[Y^2] = -1 \times 0 + 1 = 1$.

(c). Vogliamo calcolare $P((X+1)^2+Y^2 > 1)$. Usando coordinate polari di centro $(-1, 0)$ questo diventa

$$P((X + 1)^2 + Y^2 > 1) = \int_1^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\, e^{-r^2/2} r\, dr d\theta = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Nome:____