Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2022-23, II semestre
12 luglio, 2023

CP210 Introduzione alla Probabilità: Esame 2

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si può usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, . . .) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome:____

1. **(6 punti)** Un giocatore lancia 2 dadi e la sua vincita viene determinata come segue: se escono due facce uguali ottiene 4 volte il valore della faccia uscita, se escono due facce differenti ottiene la somma delle due facce. Calcolare

   (a) la probabilità che la vincita sia maggiore di 12;

   (b) la probabilità condizionata di aver ottenuto due facce uguali sapendo che la vincita è pari a 8;

   (c) Il valore atteso della vincita.

Soluzione:

a) La vincita superiore a 12 significa che si hanno due 4 oppure due 5 oppure due 6. Dunque

$$\mathbb{P}(\text{vincita superiore a } 12) = \mathbb{P}(4,4) + \mathbb{P}(5,5) + \mathbb{P}(6,6) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}\,.$$

b) Sia $A = \{\text{due facce uguali}\}$ e $B = \{\text{vincita} = 8\}$. Allora $A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$, mentre $B = \{(2,2),(6,2),(2,6),(5,3),(3,5)\}$ e si ha

$$\mathbb{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(2,2)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{5}.$$

b) Se X e Y denotano le facce dei due dadi, la vincita si può esprimere come

$$Z = (X+Y) \cdot \mathbf{1}_{X \neq Y} + 4X \cdot \mathbf{1}_{X=Y} = X + Y + 2X \cdot \mathbf{1}_{X=Y}.$$

Allora

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}[X + Y + 2X \cdot \mathbf{1}_{X=Y}] = 2\mathbb{E}[X] + 2\mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}_{X=Y}] \\ &= 2 \times 3.5 + 2\mathbb{P}(1,1) + 4\mathbb{P}(2,2) + 6\mathbb{P}(3,3) + 8\mathbb{P}(4,4) + 10\mathbb{P}(5,5) + 12\mathbb{P}(6,6) \\ &= 7 + \tfrac{42}{36} = \tfrac{49}{6}.\end{aligned}$$

Nome:______________________________________

2. **(6 punti)** Siamo in attesa di due emails importanti e stimiamo che i loro tempi di arrivo nel nostro inbox, misurati in minuti, siano due variabili esponenziali indipendenti, di parametri $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ rispettivamente.

   Calcolare:

   (a) la probabilità che nessuna delle due emails sia arrivata entro 3 minuti;

   (b) la probabilità che la prima ad arrivare sia quella con parametro $\lambda_1 = 1$;

   (c) la probabilità che la prima ad arrivare sia quella con parametro $\lambda_1 = 1$ sapendo che nessuna delle due è arrivata entro 3 minuti.

Soluzione: (a). Siano X, Y i tempi di arrivo, ossia $X = \mathrm{Esp}(\lambda_1), Y = \mathrm{Esp}(\lambda_2)$. Per l'indipendenza si ha:

$$\mathbb{P}(\text{nessuna entro 3 minuti}) = \mathbb{P}(X > 3)\mathbb{P}(Y > 3) = e^{-3\lambda_1}e^{-3\lambda_2} = e^{-9}.$$

(b). La coppia (X, Y) ha densità congiunta $f(x, y) = \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x}e^{-\lambda_2 y}\mathbf{1}_{x \geqslant 0, y \geqslant 0}$. Allora l'evento

$X < Y$ ha probabailità

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int_0^\infty dx\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\int_x^\infty dy\lambda_2 e^{-\lambda_2 y} = \int_0^\infty dx\lambda_1 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 x} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{3}.$$

(c). Sia $B = \{X > 3, Y > 3\}$ l'evento di cui al punto (a) sopra. Vogliamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < Y \mid B) &= \frac{\mathbb{P}(3 < X < Y)}{\mathbb{P}(3 < X, 3 < Y)}\\ &= \frac{\int_3^\infty dx\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\int_x^\infty dy\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}}{e^{-3(\lambda_1+\lambda_2)}} = e^{3(\lambda_1+\lambda_2)}\int_3^\infty dx\lambda_1 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 x}\\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Nome:____

3. **(6 punti)** Consideriamo due quadrati Q_1 e Q_2 nel piano $\mathbb{R}^2$, tali che Q_1 ha centro nell'origine $(0,0)$, Q_2 ha centro nel punto $(2,0)$, e tali che i corrispondenti lati L_1, L_2 siano variabili aleatorie indipendenti e uniformemente distribuite in $[0,4]$. Calcolare

   (a) il valore atteso dell'area del quadrato Q_1;

   (b) la probabilità che l'intersezione dei due quadrati sia non vuota;

   (c) il valore atteso dell'area dell'intersezione dei due quadrati;

Soluzione:
(a). Notiamo che se A_1 denota l'area di Q_1,

$$\mathbb{E}[A_1] = \mathbb{E}[L_1^2] = \tfrac{1}{4}\int_0^4 x^2 dx = \tfrac{16}{3}.$$

(b). Se A denota l'area dell'intersezione $Q_1 \cap Q_2$, abbiamo $A \neq 0$ se e solo se $L_1 + L_2 > 4$. Le variabili L_1, L_2 hanno densità congiunta $f(x,y) = \frac{1}{16}\mathbf{1}_{x\in[0,4]}\mathbf{1}_{y\in[0,4]}$. Allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset) = \mathbb{P}(A \neq 0) &= \tfrac{1}{16}\int_0^4 dx \int_0^4 dy\, \mathbf{1}_{x+y>4} \\ &= \tfrac{1}{16}\int_0^4 dx \int_{4-x}^4 dy = \tfrac{1}{16}\int_0^4 x dx = \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

(c). Notiamo che l'intersezione, se diversa dal vuoto, è un rettangolo di base $b = \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2 - 2$ e altezza $h = \min\{L_1, L_2\}$. Dunque

$$A = (\tfrac{1}{2}L_1 + \tfrac{1}{2}L_2 - 2)\cdot \min\{L_1, L_2\}\cdot \mathbf{1}_{L_1+L_2>4}.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[A] &= \mathbb{E}\left[(\tfrac{1}{2}L_1 + \tfrac{1}{2}L_2 - 2)\cdot \min\{L_1, L_2\}\cdot \mathbf{1}_{L_1+L_2>4}\right] \\ &= \tfrac{1}{16}\int_0^4 dx \int_{4-x}^4 dy (\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y - 2)\cdot \min\{x,y\}.\end{aligned}$$

Per il calcolo dell'integrale osserviamo che

$$\begin{aligned}\int_0^4 dx \int_{4-x}^4 dy \cdot \min\{x,y\} &= \int_0^4 dx \int_{4-x}^4 dy\,(x\cdot \mathbf{1}_{x<y} + y \cdot \mathbf{1}_{y<x}) \\ &= \int_0^2 dx \int_{4-x}^4 x dy + \int_2^4 dx \int_x^4 x dy + \int_2^4 dx \int_{4-x}^x y dy \\ &= \tfrac{8}{3} + \tfrac{16}{3} + 8 = 16.\end{aligned}$$

In maniera analoga si calcola

$$\int_0^4 dx \int_{4-x}^4 dy\, x \cdot \min\{x,y\} = \int_0^4 dx \int_{4-x}^4 dy\, y\cdot \min\{x,y\} = \tfrac{136}{3}.$$

In conclusione,

$$\mathbb{E}[A] = \tfrac{136}{3\times 16} - 2 = \tfrac{5}{6}.$$

Nome:____

4. **(6 punti)** Siano X, Y due variabili aleatroie continue con densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} c\sqrt{\frac{x}{y}} & \text{se } x \in (0,1) \text{ e } y \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $c > 0$ è una costante.

(a) Determinare il valore di c.

(b) Calcolare la covarianza di X e Y.

(c) Calcolare $\mathbb{E}\left[\sqrt{XY}\right]$.

Soluzione:

a). Abbiamo

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = c\int_0^1 \sqrt{x}\,dx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{4}{3}\,c.$$

Allora $c = 3/4$.

b). $f(x,y) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{x}{y}}\,\mathbf{1}_{x\in(0,1)}\mathbf{1}_{y\in(0,1)}$ ha la forma prodotto e dunque X e Y sono indipendenti. In particolare la covarianza è zero:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0.$$

c). Per l'indipendenza si ha $\mathbb{E}\left[\sqrt{XY}\right] = \mathbb{E}\left[[\sqrt{X}\right]\mathbb{E}\left[\sqrt{Y}\right]$. Inoltre notiamo che X, Y hanno densità marginali $f_X(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, per $x \in (0,1)$ e $f_Y(y) = \frac{3}{4\sqrt{y}}\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ per $y \in (0,1)$, dunque

$$\mathbb{E}[\sqrt{X}] = \frac{3}{2}\int_0^1 xdx = \frac{3}{4}\,, \qquad \mathbb{E}\left[\sqrt{Y}\right] = \frac{1}{2}\int_0^1 dy = \frac{1}{2}\,, \qquad \mathbb{E}\left[\sqrt{XY}\right] = \mathbb{E}\left[[\sqrt{X}\right]\mathbb{E}\left[\sqrt{Y}\right] = \frac{3}{8}\,.$$

Alternativamente si poteva calcolare in maniera diretta

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{XY}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\sqrt{xy}\,dxdy = \frac{3}{4}\int_0^1\int_0^1 x\,dxdy = \frac{3}{8}\,.$$

Nome:______________________________________

5. **(6 punti)** I clienti di un ufficio postale arrivano secondo un processo di Poisson con media 1 ogni 10 minuti. Calcolare:

   (a) la varianza del numero di clienti che arrivano in un'ora di lavoro;

   (b) la probabilità che il primo cliente arrivi entro 10 minuti dall'apertura;

   (c) la probabilità che il secondo cliente arrivi entro 10 minuti dall'apertura.

Soluzione: (a). In un'ora si hanno in media 6 clienti. Poiché la media e a varianza di una variabile di Poisson coincidono si ha che la varianza del numero di clienti che arrivano in un'ora di lavoro è 6.

(b). Indichiamo con X il numero di clienti nei primi dieci minuti. Dunque X è una v.a. di Poisson di parametro 1. Il primo cliente arriva entro 10 minuti dall'apertura se e solo se $X \geqslant 1$. Allora la probabilità richiesta vale

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \tfrac{1}{e}.$$

(c). Il secondo cliente arriva entro 10 minuti dall'apertura se e solo se $X \geqslant 2$. Dunque la probabilità richiesta vale

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \tfrac{2}{e}.$$

Nome:______________________________________

6. **(6 punti)** Un dado truccato ha la proprietà che ciascuna faccia pari si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calolare
   (a) la probabilità di ottenere un numero dispari al primo lancio;
   (b) la probabilità di ottenere due numeri pari nei primi due lanci;
   (c) un numero $a \in \mathbb{R}$ tale che, per n grande, la probabilità di avere la somma dei primi n lanci maggiore o uguale di $a \cdot n$ sia approssimativamente $\frac{1}{2}$.

Soluzione:

(a). Se X_i è la faccia all'i-esimo lancio, si ha $X_i = 1, 3, 5$ ciascuno con probab. p e $X_i = 2, 4, 6$ ciascuno con probab. $2p$. Sommando su tutti i possibili casi si ha $3p + 6p = 1$ e dunque $p = 1/9$. Allora la probabilità di ottenere un numero dispari al primo lancio è $3p = 1/3$.

(b). La probabilità di ottenere due numeri pari nei primi due lanci vale $(6p)^2 = 4/9$.

(c). Abbiamo
$$\mathbb{E}[X_i] = p(1+3+5) + 2p(2+4+6) = \tfrac{11}{3}.$$
Sia S_n la somma dei primi n lanci. Per il teorema del limite centrale sappiamo che
$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}$$
è approssimativamente una normale standard. Inoltre $\mathbb{E}[S_n] = n\mathbb{E}[X_1] = \frac{11}{3}\,n$. Allora se $a = \frac{11}{3}$ abbiamo
$$\mathbb{P}(S_n \geqslant a\,n) = \mathbb{P}(Z_n \geqslant 0) \approx \tfrac{1}{2}.$$