Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2023-24, II semestre
15 luglio 2024

CP210 Probabilità: esame del 15 luglio 2024

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si puo' usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nella tabella sotto. Notare che già con cinque esercizi risolti correttamente si arriva al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome:______________________________________

1. Un urna contiene 4 palline rosse e 6 palline bianche. Estraiamo una alla volta le palline, senza rimpiazzo. Calcolare

   (a) per ogni $k = 1, \ldots, 10$, la probabilità che alla k-esima estrazione si ottiene una pallina rossa.

   (b) per ogni $k = 2, \ldots, 10$, la probabilità condizionata che alla k-esima estrazione si ottiene una pallina rossa sapendo che l'estrazione precedente è bianca.

   (c) per ogni $k = 1, \ldots, 9$, la probabilità condizionata che alla k-esima estrazione si ottiene una pallina rossa sapendo che l'estrazione successiva è bianca.

Soluzione: (a). Possiamo numerare le 10 palline da 1 a 10 e considerare tutte le possibili 10! permutazioni. Diciamo che le palline da 1 a 4 sono rosse e quelle da 5 a 10 sono bianche. Poiché tutti gli ordinamenti sono equiprobabili, la probabilità di avere la pallina j nella posizione i è $1/10$ per ogni $i, j = 1, \ldots, 10$. Allora la probabilità di vedere una rossa nella k-esima posizione è $4/10$ per ogni k. Lo stesso vale le palline bianche: la probabilità di vedere una bianca nella k-esima posizione è $6/10$ per ogni k.

(b). Fissiamo $k = 2, \ldots, 10$. Consideriamo l'evento "la pallina i occupa la posizione $k-1$ e la pallina j occupa la posizione k". Se $i \neq j$, chiaramente si ha probabilità $8!/10! = 1/90$ per questo evento. Sia A l'evento "nella $(k-1)$-esima posizione si ha una pallina bianca e nella k-esima si ha una pallina rossa". Ci sono $4 \times 6 = 24$ modi di mettere una pallina bianca nella $(k-1)$-esima posizione e una rossa nella k-esima. Ognuna di queste configurazioni ha probabilità $1/90$ per l'argomento appena visto e dunque la probabilità di A è $24/90$. Allora la probabilità condizionata richiesta è

$$\frac{24/90}{6/10} = \frac{4}{9}\,,$$

per ogni $k = 2, \ldots, 10$.

(c). Lo stesso argimento di prima si può ripetere sostituendo $k-1$ con $k+1$ e si ottiene che la probabilità che alla k-esima estrazione si ottiene una pallina rossa sapendo che l'estrazione successiva è bianca vale

$$\frac{24/90}{6/10} = \frac{4}{9}\,,$$

per ogni $k = 1, \ldots, 9$.

Nome:______________________________________

2. Consideriamo 4 lanci ripetuti di una moneta equa. Calcolare la probabilità di osservare

   (a) 3 teste consecutive;

   (b) 2 teste consecutive;

   (c) 2 teste consecutive ma non 2 croci consecutive.

Soluzione: (a). Sia A l'evento "3 teste consecutive". Questo può avvenire nelle monete 1,2,3 o nelle monete 2,3,4 (o entrambi). Dunque si hanno unicamente le sequenze

$$TTTC,\ TTTT,\ CTTT\,.$$

Allora $\mathbb{P}(A) = 3/16$.

(b). Sia B l'evento "2 teste consecutive". Chiaramente $A \subset B$. Allora

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \frac{3}{16} + \mathbb{P}(B \setminus A).$$

Quindi dobbiamo solo calcolare la probabilità di $B \setminus A$ che equivale a due teste consecutive ma non tre consecutive. Questo può avvenire nei seguenti modi

$$TTCC,\ TTCT,\ CTTC,\ CCTT,\ TCTT\,.$$

Allora

$$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{16} + \frac{5}{16} = \frac{1}{2}.$$

(c). Ttra gli otto modi di ottenere 2 teste consecutive osserviamo che solamente due (CCTT,TTCC) hanno due croci consecutive. Allora la probabilità di 2 teste consecutive senza 2 croci consecutive vale $6/16 = 3/8$.

Nome:______________________________________

3. Supponiamo che gli arrivi dei visitatori di un museo seguano un processo di Poisson con una media di 4 arrivi al minuto. Osserviamo gli ingressi per un intervallo di tempo di 2 minuti, e definiamo i seguenti eventi:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Almeno 2 arrivi nel primo minuto}\}, \\ B &= \{\text{Almeno 4 arrivi nel secondo minuto}\}, \\ C &= \{\text{Esattamente 6 arrivi nei 2 minuti}\}. \end{aligned}$$

Calcolare le probabilità condizionate:

a) $\mathbb{P}(A \mid C)$;

b) $\mathbb{P}(B \mid C)$;

c) $\mathbb{P}(A \cap B \mid C)$.

Soluzione: (a). Sia N_1 il numero di arrivi nel primo minuto e N_2 il numero di arrivi nel secondo minuto. Allora N_i è una Poisson di parametro 4 e $N_1 + N_2$ è una Poisson di parametro 8, e

$$\mathbb{P}(A \mid C) = 1 - \mathbb{P}(A^c \mid C) = 1 - \mathbb{P}(N_1 = 0 \mid N_1 + N_2 = 6) - \mathbb{P}(N_1 = 1 \mid N_1 + N_2 = 6)$$

Per l'indipendenza di N_1, N_2 abbiamo

$$\mathbb{P}(N_1 = 0 \mid N_1 + N_2 = 6) = \frac{\mathbb{P}(N_1 = 0)\mathbb{P}(N_2 = 6)}{\mathbb{P}(N_1 + N_2 = 6)} = \frac{e^{-4} \times 4^6 e^{-4}/6!}{8^6 e^{-8}/6!} = 2^{-6}.$$

Inoltre

$$\mathbb{P}(N_1 = 1 \mid N_1 + N_2 = 6) = \frac{\mathbb{P}(N_1 = 1)\mathbb{P}(N_2 = 5)}{\mathbb{P}(N_1 + N_2 = 6)} = \frac{4e^{-4} \times 4^5 e^{-4}/5!}{8^6 e^{-8}/6!} = 6 \times 2^{-6}.$$

In conclusione, $\mathbb{P}(A \mid C) = 1 - 7 \times 2^{-6}$.

(b). In modo simile si ottiene

$$\mathbb{P}(B \mid C) = \mathbb{P}(N_2 = 4 \mid N_1 + N_2 = 6) + \mathbb{P}(N_2 = 5 \mid N_1 + N_2 = 6) + \mathbb{P}(N_2 = 6 \mid N_1 + N_2 = 6).$$

Si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_2 = 4 \mid N_1 + N_2 = 6) &= \frac{\mathbb{P}(N_2 = 4)\mathbb{P}(N_2 = 2)}{\mathbb{P}(N_1 + N_2 = 6)} = \frac{4^4 e^{-4} 4^2 e^{-4}/(4!2!)}{8^6 e^{-8}/6!} = 15 \times 2^{-6}, \\ \mathbb{P}(N_2 = 5 \mid N_1 + N_2 = 6) &= \frac{4^5 e^{-4} 4^1 e^{-4}/5!}{8^6 e^{-8}/6!} = 6 \times 2^{-6}, \\ \mathbb{P}(N_2 = 6 \mid N_1 + N_2 = 6) &= \frac{4^6 e^{-4} e^{-4}/6!}{8^6 e^{-8}/6!} = 2^{-6}. \end{aligned}$$

Pertanto $\mathbb{P}(B \mid C) = 22 \times 2^{-6}$.

(c). Abbiamo

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(N_1 = 2, N_2 = 4 \mid N_1 + N_2 = 6) = 15 \times 2^{-6}.$$

Nome:______________________________________

4. Consideriamo un'elezione in cui n votanti sono chiamati a scegliere tra tre candidati. Supponiamo che ogni votante, indipendentemente, voti il candidato A con probabilità $\frac{1}{2}$ e i candidati B, C con probabilità $\frac{1}{4}$ ciascuno. Calcolare, nel limite $n \to \infty$,

   (a) la probabilità che A riceva oltre un terzo dei voti totali;

   (b) la probabilità che A riceva la maggioranza assoluta dei voti;

   (c) la probabilità che B riceva la maggioranza assoluta dei voti.

Soluzione: (a). Siano X_n, Y_n il numero di voti di A, B rispettivamente. L'evento "A ha oltre un terzo dei voti totali" equivale a $X_n \geq n/3$. X_n è una binomiale di parametri n, $\frac{1}{2}$ e dunque la legge dei grandi numeri garantisce che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > n/3) = 1$$

(b). L'evento "A ha la maggioranza assoluta" equivale a $X_n \geq n/2$. Per il teorema del limite centrale, se $\mathcal{N}$ denota una variable normale standard,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > n/2) = \mathbb{P}(\mathcal{N} > 0) = \frac{1}{2}.$$

(c). Y_n è una binomiale di parametri n, $\frac{1}{4}$ e dunque la legge dei grandi numeri garantisce che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n > n/2) = 0$$

Nome:______________________________________

5. Siano P_1, P_2 due punti aleatori indipendenti, scelti uniformemente a caso nel disco

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Sia X_i, $i = 1, 2$, la distanza di P_i dall'origine. Calcolare:

(a) la densità di probabilità congiunta della coppia (X_1, X_2)

(b) la probabilità che $X_1 \leq 2X_2$

(c) la varianza di $X_1 - X_2$

Soluzione: (a). Calcoliamo la densità della variabile X_i. L'evento $X_1 \leq t$ coincide con la regione $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq t^2\}$, $t \leq 2$. Allora, per $t \in [0, 2]$,

$$\mathbb{P}(X_i \leq t) = \frac{\text{Area}(A)}{\text{Area}(D)} = \frac{t^2}{4}.$$

Differenziando si ha che X_i ha densità $f_i(t) = \frac{t}{2} \mathbf{1}_{t \in [0,2]}$. Per l'indipendenza la coppia (X_1, X_2) ha densità congiunta

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{4} \mathbf{1}_{x_1 \in [0,2]} \mathbf{1}_{x_2 \in [0,2]} \,.$$

(b). Calcoliamo

$$\mathbb{P}(X_1 \leq 2X_2) = \int_0^2 dx_1 \int_{\frac{1}{2}x_1}^2 dx_2 \frac{x_1 x_2}{4} = \int_0^2 dx_1 (\tfrac{1}{2} - \tfrac{x_1^2}{8}) = \frac{7}{8}.$$

(c). Per l'indipendenza, $\text{Var}(X_1 - X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(-X_2) = 2\text{Var}(X_1)$. Inoltre

$$\text{Var}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1] = \int_0^2 dx \, x^2 \, \frac{x}{2} - \left(\int_0^2 dx \, x \, \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad \text{Var}(X_1 - X_2) = \frac{4}{9} \,.$$

Nome:____

6. Supponiamo di effettuare una telefonata, la cui durata è una variabile esponenziale di media a minuti, per qualche $a > 0$. Il costo della telefonata è di 1 euro se la durata non supera 2 minuti, mentre è di 2 euro se la durata supera 2 minuti. Calcolare, in funzione di $a > 0$:
   (a) La probabilità di spendere 1 euro;
   (b) Il valore atteso del costo;
   (c) La varianza del costo.

Soluzione:
(a). Sia T l'esponenziale di media a. Scriviamo il costo X come

$$X = \mathbf{1}_{T \leq 2} + 2\mathbf{1}_{T>2}.$$

La probabilità di spendere 1 euro è la probabilità di $T \leq 2$, ossia $1 - e^{-2/a}$.

(b). Il valore atteso del costo è

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^2 (\mathbf{1}_{t \leq 2} + 2\mathbf{1}_{t>2})(1/a)e^{-t/a} dt = 1 - e^{-2/a} + 2e^{-2/a} = 1 + e^{-2/a}.$$

(c). Calcoliamo

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^2 (\mathbf{1}_{t \leq 2} + 2\mathbf{1}_{t>2})^2(1/a)e^{-t/a} dt = 1 - e^{-2/a} + 4e^{-2/a} = 1 + 3e^{-2/a}.$$

Allora la varianza vale

$$\mathrm{Var}(X) = 1 + 3e^{-2/a} - (1 + e^{-2/a})^2 = e^{-2/a} - e^{-4/a}.$$

Nome:____