Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2024-25, II semestre
15 luglio 2025

CP210 Probabilità: esame del 15 luglio 2025

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si puo' usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nella tabella sotto. Notare che già con cinque esercizi risolti correttamente si arriva al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome:____

1. Un'urna contiene 8 palline di cui 4 rosse e 4 bianche. Estraiamo una alla volta le palline, senza rimpiazzo. Calcolare

   (a) la probabilità che alla quinta estrazione si ottiene una pallina rossa.

   (b) la probabilità condizionata che alla quinta estrazione si ottiene una pallina rossa sapendo che le prime 3 estrazioni contengono esattamente 2 palline rosse.

   (c) la probabilità condizionata che alla prima estrazione si ottiene una pallina rossa sapendo che le ultime 3 estrazioni contengono esattamente 2 palline bianche.

Soluzione:

Tutte le 8! permutazioni delle palline sono equiprobabili. Ci sono quattro palline rosse che possiamo mettere nella quinta posizione e dunque

$$P(\text{quinta pallina è rossa}) = \frac{4 \times 7!}{8!} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Per la probabilità condizionata che alla quinta estrazione si ottiene una pallina rossa sapendo che le prime 3 estrazioni contengono esattamente 2 palline rosse possiamo ragionare come segue. Dopo la terza estrazione ci sono 2 rosse e tre bianche. Il risultato delle estrazioni successive si può rappresentare con 5! permutazioni tutte equiprobabili. Le permutazioni che hanno una rossa nella quinta posizione sono $2 \times 4!$ e dunque

$$P(\text{quinta pallina è rossa} \mid \text{2 rosse tra le prime 3}) = \frac{2 \times 4!}{5!} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

Per simmetria possiamo calcolare la probabilità condizionata che alla prima estrazione si ottiene una pallina rossa sapendo che le ultime 3 estrazioni contengono esattamente 2 palline bianche come la probabilità condizionata che alla ultima estrazione si ottiene una pallina rossa sapendo che le prime 3 estrazioni contengono esattamente 2 palline bianche. Ragionando come sopra otteniamo

$$P(\text{prima pallina è rossa} \mid \text{2 bianche tra le ultime 3}) = \frac{3 \times 4!}{5!} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

Nome:______________________________________

2. Lanciamo 3 dadi. Calcolare

   (a) il valore atteso della somma;

   (b) la probabilità che la somma sia pari;

   (c) la probabilità condizionata di avere esattamente due facce uguali sapendo che la somma è pari.

Soluzione: Sia X_i il risultato del lancio del dado i-esimo, per $i = 1, 2, 3$.
Ogni X_i è una variabile aleatoria con valori da 1 a 6, con distribuzione uniforme. Il valore atteso di ciascun dado è:

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5\,.$$

Per linearità:

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3] = \frac{21}{2} = \boxed{10.5}$$

Per avere somma pari si devono avere $A = \{\text{tre facce pari}\}$, oppure $B = \{\text{due facce dispari e una pari}\}$. Per indipendenza si ha $P(A) = (1/2)^3 = 1/8$. Inoltre $P(B) = 3 \times (1/2)^3 = 3/8$. Allora

$$P(\text{somma pari}) = P(A \cup B) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Sia $C = \{\text{esattamente due facce uguali}\}$. Notiamo che $C \cap \{\text{somma pari}\} = D$, dove D è l'evento di avere due facce uguali e la terza diversa, tale che la somma sia pari. Ci sono tre modi di scegliere la posizione della faccia diversa, e per ogni scelta di questa si hanno 6 possibili modi di scegliere le facce uguali. Notiamo che la faccia diversa deve essere necessariamente pari. Data la scelta delle due facce uguali, se sono entrambe dispari, per esempio due 3, si hanno tre modi di scegliere la faccia diversa, mentre se sono entrambe pari, per esempio 4, si hanno due modi di scegliere quella diversa. In conclusione, ci sono $3 \times (3 \times 3 + 3 \times 2) = 27 + 18 = 45$ modi su 6^3 di ottenere l'evento D. Allora

$$P(\text{esattamente due facce uguali} \mid \text{somma pari}) = \frac{P(D)}{P(A \cup B)} = \frac{45/6^3}{1/2} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

Nome:____

3. Supponiamo che le birre ordinate in un bar tra le 20:00 e le 24:00 seguano un processo di Poisson tale che:

   - tra le 20:00 e le 22:00, la media è di 20 ordini per ora;
   - tra le 22:00 e le 24:00, la media scende a 16 ordini per ora.

   Calcolare:

   a) il valore atteso del numero di birre ordinate tra le 21:30 e le 22:30;

   b) la probabilità condizionata che siano ordinate 10 birre tra le 21:30 e le 22:30, sapendo che tra le 20:00 e le 21:00 sono state ordinate 20 birre;

   c) la probabilità condizionata che siano ordinate 10 birre tra le 21:30 e le 22:30, sapendo che tra le 20:00 e le 24:00 sono state ordinate 40 birre.

Soluzione:
Sia X il numero di birre tra le 21:30 e le 22:30. Allora X è somma di due Poisson indipendenti, una di media 10 e l'altra di media 8. Dunque è una Poisson di media 18, e

$$E[X] = \boxed{18}$$

X è indipendente dal numero di birre ordinate prima delle 21:30 dunque la probabilità condizionata che siano ordinate 10 birre tra le 21:30 e le 22:30, sapendo che tra le 20:00 e le 21:00 sono state ordinate 20 birre è

$$P(X = 10) = \boxed{\frac{18^{10}e^{-18}}{10!}}$$

Sia Y il numero di birre tra le 20 e le 24. Inoltre sia Z il numero di birre tra le 20 e le 21:30 e tra le 22:30 e le 24. Dunque Z è Poisson di media $30 + 24 = 54$, mentre Y è Poisson di media $40 + 32 = 72$, e $Z = Y - X$ è indipendente da X. Allora

$$P(X = 10 \mid Y = 40) = \frac{P(X = 10)P(Z = 30)}{P(Y = 40)} = \frac{\frac{18^{10}}{10!}\frac{54^{30}}{30!}}{72^{40}/40!} = \boxed{\binom{40}{10}(\tfrac{1}{4})^{10}(\tfrac{3}{4})^{30}}$$

Nome:_________________________________

4. Consideriamo una votazione in cui n persone sono chiamate a esprimere un parere su una questione. Supponiamo che ogni votante, indipendentemente, con probabilità $\frac{1}{4}$ si astiene, con probabilità $\frac{1}{4}$ esprime parere contrario e con probabilità $\frac{1}{2}$ esprime parere favorevole. Calcolare, nel limite $n \to \infty$,

   (a) la probabilità che la percentuale di astenuti superi il 20% del totale;

   (b) la probabilità che il numero di voti contrari superi il numero di voti favorevoli;

   (c) la probabilità che la percentuale di voti favorevoli superi il 50% del totale.

Soluzione:

(a). Siano X_n, Y_n, Z_n il numero di voti di $favorevole, contrario, astenuto$ rispettivamente. L'evento " la percentuale di astenuti supera il 20% " equivale a $Z_n \geq n/5$. Essendo Z_n una binomiale di parametri n, $\frac{1}{4}$, per la legge dei grandi numeri si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n > n/5) = \boxed{1}.$$

(b). L'evento "il numero di voti contrari superi il numero di voti favorevoli" equivale a $X_n < Y_n$. Consideriamo l'evento $A_n = \{X_n > n/3\}$. X_n è binomiale di parametri n, $\frac{1}{2}$ e dunque, per la legge dei grandi numeri si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1\,.$$

Osserviamo che $\{X_n < Y_n\} = (\{X_n < Y_n\} \cap A_n) \cup (\{X_n < Y_n\} \cap A_n^c)$ e che $\{X_n < Y_n\} \cap A_n \subset \{Y_n > n/3\}$. Allora

$$\mathbb{P}(X_n < Y_n) = \mathbb{P}(\{X_n < Y_n\} \cap A_n) + \mathbb{P}(\{X_n < Y_n\} \cap A_n^c) \leq \mathbb{P}(Y_n > n/3) + \mathbb{P}(A_n^c)\,.$$

Si ha $\mathbb{P}(A_n^c) = 1 - \mathbb{P}(A_n) \to 0$. Inoltre per la legge dei grandi numeri $\mathbb{P}(Y_n > n/3) \to 0$. Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n < Y_n) = \boxed{0}.$$

(c). Per il teorema del limite centrale X_n è approssimativamente normale di media $n/2$. Allora gli argomenti usuali mostrano che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > n/2) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Nome:____

5. Sia R una variabile aleatoria continua con densità di probabilità

$$f(r) = re^{-r^2/2}\,\mathbf{1}_{[0,\infty)}(r).$$

Sia D_R il disco di raggio R centrato nell'origine:

$$D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Calcolare:

(a) il valore atteso della circonferenza di D_R

(b) il valore atteso dell'area di D_R

(c) la probabilità che D_R contenga il disco di raggio 1 centrato nel punto del piano di coordinate $(1,0)$.

Soluzione: (a). Integrando per parti e usando il noto integrale gaussiano $\int_0^\infty e^{-r^2/2}dr = \sqrt{2\pi}/2$,

$$\mathbb{E}[2\pi R] = 2\pi \int_0^\infty r^2 e^{-r^2/2} dr = 2\pi \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \boxed{\sqrt{2}\,\pi^{3/2}}.$$

(b). Integrando per parti si ha

$$\mathbb{E}[\pi R^2] = \pi \int_0^\infty r^3 e^{-r^2/2} dr = \boxed{2\pi}$$

(c). L'evento in questione si può scrivere come $R > 2$. Allora

$$P(D_R \text{ contiene il disco di raggio 1 centrato in } (1,0)) = P(R > 2) = \int_2^\infty r e^{-r^2/2} dr = \boxed{e^{-2}}$$

Nome:____

6. Anna e Aldo si incontrano alle 7:00 alla fermata dell'autobus per andare a scuola. L'autobus arriva a un tempo aleatorio tra le 7:00 e le 8:00, con distribuzione uniforme. L'autobus impiega 20 minuti per arrivare a scuola. Aldo decide che andrà a piedi se il bus non è arrivato entro le 7:30. Il tragitto a piedi richiede 1 ora.

   Calcolare:

   a) il valore atteso dell'orario di arrivo di Anna;

   b) il valore atteso dell'orario di arrivo di Aldo;

   c) la probabilità che Aldo arrivi prima di Anna.

Soluzione: (a). Il tempo necessario a Anna, in minuti, è dato da $X+20$, dove X è uniforme in $[0, 60]$. In media vale 50 minuti. Allora Anna arriva in media alle $7:50$.

(b). Il tempo necessario a Aldo, in minuti, è $(X+20)\mathbf{1}_{X\leq 30} + 60\mathbf{1}_{X>30}$. Allora in media vale

$$E[(X+20)\mathbf{1}_{X\leq 30}] + 90E[\mathbf{1}_{X>30}] = \frac{35}{2} + 45 = \boxed{62.5}$$

e dunque Aldo arriva in media alle $8:02$ e 30 secondi. Qui abbiamo usato

$$E[\mathbf{1}_{X>30}] = P(X>30) = \frac{1}{2}\,, \qquad E[X\mathbf{1}_{X\leq 30}] = \int_0^{30} \frac{xdx}{60} = \frac{15}{2}$$

(c). Se $X \leq 30$ Aldo arriva allo stesso tempo di Anna. Se $X > 30$ Aldo impiega 90 minuti, mentre Anna ne impiega al massimo 80, dunque Aldo non può arrivare prima di Anns. Allora

$$P(\text{Aldo arriva prima di Anna}) = \boxed{0}$$