

CP210 Probabilità: esame del 15 luglio 2026

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si può usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di più pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nella tabella sotto. Notare che già con cinque esercizi risolti correttamente si arriva al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome: _____

1. Un'urna contiene 12 palline: 5 bianche, 4 nere e 3 rosse. Si estraggono 4 palline senza rimpiazzo.

Calcolare:

- (a) la probabilità che la terza pallina estratta sia bianca;
- (b) la probabilità che nelle prime due estrazioni sia uscita esattamente una pallina bianca, sapendo che la terza pallina estratta è bianca;
- (c) la probabilità che la prima pallina sia rossa, sapendo che nelle ultime tre estrazioni non compare alcuna pallina rossa.

Soluzione

- (a) Per simmetria ogni estrazione ha la stessa probabilità di essere bianca. Quindi

$$\mathbb{P}(3a \text{ bianca}) = \frac{5}{12}.$$

- (b) Condizionando sul fatto che nelle prime due estrazioni compare esattamente una pallina bianca, restano 10 palline, di cui 4 bianche. Pertanto, se A è l'evento che nelle prime due estrazioni compare esattamente una pallina bianca, si ha

$$\mathbb{P}(3a \text{ bianca} \mid A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Inoltre la probabilità di A si può calcolare con

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{5}{1}\binom{7}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{35}{66}$$

E dunque, usando la formula di Bayes,

$$\mathbb{P}(A \mid 3a \text{ bianca}) = \mathbb{P}(3a \text{ bianca} \mid A) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(3a \text{ bianca})} = \frac{2}{5} \times \frac{35}{66} \times \frac{12}{5} = \frac{28}{55}.$$

- (c) Sapere che nelle ultime tre estrazioni non compaiono palline rosse equivale a rimuovere dapprima tre palline non rosse.

Restano quindi 9 palline, di cui 3 rosse.

Perciò

$$\mathbb{P}(1a \text{ rossa} \mid \text{ultime tre senza rosse}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Nome: _____

2. Un test consiste in 8 domande indipendenti.

Ogni domanda è di tipo A con probabilità $\frac{1}{2}$ e di tipo B con probabilità $\frac{1}{2}$.

Uno studente risponde correttamente ad una domanda di tipo A con probabilità $\frac{1}{2}$, mentre risponde correttamente ad una domanda di tipo B con probabilità $\frac{3}{4}$.

Calcolare:

- (a) la probabilità che una domanda scelta a caso venga risposta correttamente;
- (b) il numero medio di risposte corrette;
- (c) la probabilità che la seconda domanda sia di tipo B, sapendo che è stata risposta correttamente.

Soluzione

(a) Indicando con C l'evento "risposta corretta"

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{8}.$$

(b) Il numero di risposte corrette è la somma di otto variabili indicatrici, ciascuna con valore atteso $5/8$. Quindi

$$\mathbb{E}[N] = 8 \cdot \frac{5}{8} = 5.$$

(c) Per la formula di Bayes,

$$\mathbb{P}(B \mid C) = \frac{\mathbb{P}(C \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}.$$

Nome: _____

3. Ad un centralino arrivano telefonate su due linee indipendenti.

Le telefonate sulla prima linea seguono un processo di Poisson che ha, in media, una telefonata ogni 10 minuti.

Le telefonate sulla seconda linea seguono un processo di Poisson che ha, in media, due telefonate ogni 10 minuti.

Calcolare:

- (a) la probabilità che la prima telefonata arrivi sulla seconda linea.
- (b) il numero medio di telefonate complessive nella prima ora;
- (c) la probabilità di avere 4 telefonate sulla prima linea nella prima ora sapendo che nella prima ora sono arrivate 12 telefonate in totale.

Soluzione

- (a) Se misuriamo il tempo in minuti, la prima linea è un processo di Poisson di parametro $\lambda_1 = 1/10$ e la seconda linea è un processo di Poisson di parametro $\lambda_2 = 2/10$. Sappiamo che il tempo del primo arrivo di un processo di Poisson di parametro λ è una variabile esponenziale di parametro λ . Dunque se T e S sono i tempi di arrivo della prima telefonata sulla prima e sulla seconda linea rispettivamente, si ha che T e S sono esponenziali indipendenti di parametri λ_1 e λ_2 , con densità congiunta $f(t, s) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \lambda_2 e^{-\lambda_2 s} \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}} \mathbf{1}_{\{s \geq 0\}}$. Allora

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > S) &= \int \int f(t, s) \mathbf{1}_{\{t \geq s\}} dt ds = \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 s} ds \int_s^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} dt \\ &= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)s} ds = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

- (b) Siano N_1 e N_2 i numeri di telefonate ricevute nell'ora dalla prima e dalla seconda linea. Allora

$$N_1 \sim \text{Poisson}(6), \quad N_2 \sim \text{Poisson}(12),$$

e le due variabili sono indipendenti. La variabile $N_1 + N_2$ è Poisson di parametro $6 + 12 = 18$. Allora ha valore atteso

$$\mathbb{E}[N_1 + N_2] = 18.$$

- (c) Condizionatamente al totale $N_1 + N_2 = 12$, la variabile N_1 soddisfa

$$\mathbb{P}(N_1 = 4 \mid N_1 + N_2 = 12) = \frac{\mathbb{P}(N_1 = 4) \mathbb{P}(N_2 = 8)}{\mathbb{P}(N_1 + N_2 = 12)} = \frac{\frac{6^4}{4!} e^{-6} \frac{12^8}{8!} e^{-12}}{\frac{18^{12}}{12!} e^{-18}}$$

Pertanto

$$\mathbb{P}(N_1 = 4 \mid N_1 + N_2 = 12) = \binom{12}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^8.$$

Allo stesso modo si mostra che per ogni $k \in \{0, \dots, 12\}$, si ha $\mathbb{P}(N_1 = k \mid N_1 + N_2 = 12) = \binom{12}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{12-k}$, ossia N_1 , condizionatamente a $N_1 + N_2 = 12$, è una binomiale di parametri 12 e $1/3$.

Nome: _____

4. In un ufficio ci sono quattro sportelli, indicati con A, B, C e D. Ogni cliente, indipendentemente, sceglie uno sportello, con probabilità rispettivamente

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{6}.$$

Nel limite in cui il numero di clienti cresce all'infinito, calcolare:

- (a) la probabilità che più del 40% dei clienti scelga lo sportello C;
- (b) la probabilità che la percentuale complessiva di clienti che scelgono gli sportelli A oppure B sia compresa tra il 45% e il 55%;
- (c) la probabilità che lo sportello C riceva più del doppio di clienti dello sportello D.

Soluzione

Sia n il numero di clienti, e siano A_n, B_n, C_n, D_n i numeri di clienti che scelgono rispettivamente i quattro sportelli.

- (a) Per la legge dei grandi numeri,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{C_n}{n} - \frac{1}{3}\right| > \epsilon\right) \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$, per ogni $\epsilon > 0$ fissato. Poiché $\frac{1}{3} < 0.4$, si ottiene

$$\mathbb{P}\left(\frac{C_n}{n} > 0.4\right) \rightarrow 0.$$

- (b) Per ogni cliente, la probabilità di scegliere A oppure B è $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Pertanto, per la legge dei grandi numeri,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{A_n + B_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \epsilon\right) \rightarrow 0,$$

Prendendo $\epsilon = 0.05$ si ha

$$\mathbb{P}\left(0.45 \leq \frac{A_n + B_n}{n} \leq 0.55\right) \rightarrow 1.$$

- (c) Scriviamo

$$C_n - 2D_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad X_i = \begin{cases} 1, & \text{se il cliente } i \text{ sceglie C,} \\ -2, & \text{se il cliente } i \text{ sceglie D,} \\ 0, & \text{se il cliente } i \text{ sceglie A oppure B.} \end{cases}$$

Le variabili X_i sono indipendenti e identicamente distribuite e $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{3} - 2\frac{1}{6} = 0$, mentre $\text{Var}(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] = \frac{1}{3} + \frac{4}{6} = 1$. Per il teorema del limite centrale,

$$Z_n = \frac{C_n - 2D_n}{\sqrt{n}}$$

converge in distribuzione a una variabile normale standard. Ne segue

$$\mathbb{P}(C_n > 2D_n) = \mathbb{P}(Z_n > 0) \rightarrow \mathbb{P}(N(0, 1) > 0) = \frac{1}{2}.$$

Nome: _____

5. Sia R una variabile aleatoria continua con densità

$$f(r) = \frac{1}{2}r^2e^{-r}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(r).$$

Sia C_R il cerchio centrato nell'origine e di raggio R .

Calcolare:

- (a) il valore atteso della lunghezza della circonferenza di C_R ;
- (b) il valore atteso dell'area di C_R ;
- (c) la probabilità che C_R contenga il disco di raggio 1 centrato nell'origine.

Soluzione

La variabile R ha distribuzione Gamma con parametri $\alpha = 3$ e $\lambda = 1$. Allora

$$\mathbb{E}[R] = \frac{\alpha}{\lambda} = 3, \quad \mathbb{E}[R^2] = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} = 12.$$

(a) La lunghezza della circonferenza è

$$L = 2\pi R.$$

Quindi

$$\mathbb{E}[L] = 2\pi\mathbb{E}[R] = 6\pi.$$

(b) L'area del cerchio è $A = \pi R^2$. Pertanto

$$\mathbb{E}[A] = \pi\mathbb{E}[R^2] = 12\pi.$$

(c) Il cerchio C_R contiene il disco di raggio 1 se e solo se $R \geq 1$. Dunque

$$\mathbb{P}(R \geq 1) = \frac{1}{2} \int_1^\infty r^2 e^{-r} dr.$$

Integrando per parti,

$$\int_1^\infty r^2 e^{-r} dr = [-r^2 e^{-r}]_1^\infty + 2 \int_1^\infty r e^{-r} dr.$$

Inoltre,

$$\int_1^\infty r e^{-r} dr = [-r e^{-r}]_1^\infty + \int_1^\infty e^{-r} dr = \frac{2}{e}.$$

Pertanto

$$\int_1^\infty r^2 e^{-r} dr = \frac{1}{e} + \frac{4}{e} = \frac{5}{e},$$

e quindi

$$\mathbb{P}(R \geq 1) = \frac{5}{2e}.$$

Nome: _____

6. Anna e Bruno partono insieme alle 18:00 per andare al cinema. Il tempo di arrivo di un bus che li porta a destinazione è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra le 18:00 e le 18:30. Una volta arrivato, il bus impiega 10 minuti per giungere a destinazione. Anna decide di aspettare sempre il bus. Bruno, invece, aspetta il bus fino alle 18:10; se entro quell'ora non è ancora arrivato, prende un monopattino a noleggio, con cui impiega 20 minuti per raggiungere la stessa destinazione.

Calcolare:

- (a) il valore atteso dell'orario di arrivo di Anna;
- (b) il valore atteso dell'orario di arrivo di Bruno;
- (c) la probabilità che Bruno arrivi prima di Anna.

Soluzione Sia $T \sim \text{Unif}[0, 30]$ il tempo di arrivo del bus, espresso in minuti dopo le 18:00.

- (a) Anna aspetta sempre il bus, quindi arriva dopo $T + 10$ minuti. Poiché $\mathbb{E}[T] = 15$, si ha $\mathbb{E}[T + 10] = 25$. Anna arriva quindi, in media, alle 18:25.
- (b) Se $T \leq 10$, Bruno prende il bus e arriva dopo $T + 10$ minuti.

Se invece $T > 10$, alle 18:10 prende il monopattino e arriva dopo altri 20 minuti, cioè alle 18:30. Indichiamo con X il tempo di arrivo di Bruno, misurato in minuti dopo le 18:00. Allora

$$X = (T + 10)\mathbf{1}_{\{T \leq 10\}} + 30\mathbf{1}_{\{T > 10\}}.$$

Pertanto

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{30} \int_0^{10} (t + 10) dt + 30 \frac{20}{30}.$$

Ora

$$\int_0^{10} (t + 10) dt = \left[\frac{t^2}{2} + 10t \right]_0^{10} = 50 + 100 = 150.$$

Quindi

$$\mathbb{E}[X] = \frac{150}{30} + 20 = 25.$$

Bruno arriva dunque, in media, anche lui alle 18:25.

- (c) Se $T \leq 10$, Anna e Bruno prendono entrambi il bus e arrivano nello stesso momento. Se $T > 10$, Bruno arriva alle 18:30, mentre Anna arriva dopo $T + 10$ minuti dalle 18:00. Bruno arriva prima di Anna se e solo se $30 < T + 10$, ossia se $T > 20$. Pertanto

$$\mathbb{P}(\text{Bruno arriva prima di Anna}) = \mathbb{P}(T > 20) = \frac{1}{3}.$$

Nome: _____