

Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2009-2010, II semestre
15 settembre, 2010

CP110 Probabilità: Esame del 15 settembre 2010

Testo e soluzione

Nome: _____

1. **(6 pts)** 10 carte numerate da 1 a 10 vengono estratte in ordine casuale. All'estrazione della i -esima carta si vince un punto se la carta è maggiore di i e si perde un punto se la carta è minore di i (se la carta è uguale a i non si vince/perde nulla). Calcolare il numero medio di punti dopo l'ultima estrazione.

Soluzione: La probabilità di vincere 1 all' i -esima estrazione è $(10 - i)/10$, che è la stessa probabilità di perdere 1 alla $(11 - i)$ -esima estrazione. Quindi la vincita media alla prima estrazione è bilanciata dalla perdita alla 10-estrazione e così via. Il valor medio è pertanto uguale a zero.

Nome: _____

2. **(6 pts)** Si dispone di 5 monete tali che se si lancia la moneta i , il risultato è testa con probabilità $i/5$, $i = 1, \dots, 5$. Si sceglie a caso una moneta da lanciare. Calcolare il valor medio e la varianza del numero di teste in 10 lanci indipendenti della moneta scelta.

Soluzione: Sia E_i l'evento {la moneta scelta è la i }. Sia X il numero di teste. Condizionata all'evento E_i , la X è una binomiale $B(10, i/5)$. Quindi $E[X | E_i] = np = \frac{10i}{5}$ e $\text{Var}[X | E_i] = np(1-p) = \frac{10i}{5}(1 - \frac{i}{5})$. Si ha

$$E[X] = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 E[X | E_i] = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \frac{10i}{5} = 6.$$

Inoltre

$$E[X^2] = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 E[X^2 | E_i] = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (\text{Var}[X | E_i] + E[X | E_i]^2) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \left(\frac{10i}{5} \left(1 - \frac{i}{5}\right) + 4i^2 \right)$$

Quindi

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \left(\frac{10i}{5} \left(1 - \frac{i}{5}\right) + 4i^2 \right) - 36 = \frac{48}{5}$$

Nome: _____

3. (6 pts) Per una catena di Markov a tre stati, le probabilità di salto da A a B , da B a C , e da C a A sono uguali a 0.5, e la probabilità di restare fermi è uguale a 0.5.
- a) Partendo da A , calcolare la probabilità di essere in A dopo tre salti
 - b) Scrivere la matrice di transizione della catena e calcolarne la misura invariante.

Soluzione: La matrice è data da

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Ci sono due modi di arrivare in A dopo tre passi se si parte da A . 1) si rimane per tre volte fermi in A . Questo ha prob. $(0.5)^3 = 1/8$. 2) si salta prima in B poi in C e poi in A . Questo ha prob. $(0.5)^3 = 1/8$. Quindi la prob. richiesta è $1/8 + 1/8 = 1/4$. Risolvendo il sistema $\sum_i \pi_i P_{i,j} = \pi_j$ si trova che la misura invariante π è uniforme, ossia $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Nome: _____

4. **(6 pts)** Siano X e Y due variabili geometriche indipendenti di parametri $p_X = 1/2$ e $p_Y = 1/4$. Determinare la probabilità dell'evento $X \geq Y$.

Soluzione:

$$\begin{aligned} P(X \geq Y) &= \sum_{k,j: k \geq j \geq 1} P(X = k)P(Y = j) = \sum_{k,j: k \geq j \geq 1} p_X(1 - p_X)^{k-1} p_Y(1 - p_Y)^{j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} p_Y(1 - p_Y)^{j-1} \sum_{k=j}^{\infty} p_X(1 - p_X)^{k-1} = \sum_{j=1}^{\infty} p_Y(1 - p_Y)^{j-1} (1 - p_X)^{j-1} \sum_{k=0}^{\infty} p_X(1 - p_X)^k \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} p_Y(1 - p_Y)^{j-1} (1 - p_X)^{j-1} = \frac{p_Y}{1 - (1 - p_X)(1 - p_Y)}. \end{aligned}$$

Usando $p_x = 1/2$ e $p_Y = 1/4$ si ha $P(X \geq Y) = 2/5$.

Nome: _____

5. **(6 pts)** Due confezioni A, B contengono semi di girasole in uguale quantità. Nella confezione A ogni seme ha probabilità 0.9 di produrre un fiore, nella confezione B la stessa probabilità vale 0.95. I semi vengono mischiati in un unico gruppo.
- a) Calcolare la probabilità che un seme scelto a caso produca un fiore
 - b) Un seme scelto a caso produce un fiore. Calcolare la probabilità che provenga dalla confezione B .

Soluzione: a) la prob. richiesta è data da $\frac{1}{2} 0.9 + \frac{1}{2} 0.95 = 0.925$

b) la prob. richiesta è data da $\frac{1}{2} 0.95 / (\frac{1}{2} 0.9 + \frac{1}{2} 0.95) = 0.95/1.85$.

Nome: _____

6. (6 pts) Siano $Z_1, \dots, Z_n$ copie indipendenti della variabile esponenziale di parametro 2, e sia

$$X_n = \sum_{i=1}^n Z_i.$$

- a) Fornire un valore approssimato (per n grandi) della probabilità dell'evento $\{X_n \geq n/2\}$.
- b) Determinare la densità di probabilità di X_n , per ogni n .

Soluzione:

- a) Notiamo che $E[X_n] = n E[Z_1] = n/2$. Quindi per il teorema del limite centrale si ha

$$P(X_n \geq n/2) = P\left(\frac{X_n - E[X_n]}{\sqrt{\text{Var}(X_n)}} \geq 0\right) \approx \frac{1}{2}.$$

- b) Ricordiamo che la somma di esponenziali di parametro λ indipendenti produce una variabile $\Gamma(n, \lambda)$ che ha densità

$$\frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} 1_{t \geq 0}.$$

Per verificare questa formula si può utilizzare la funzione generatrice dei momenti. Prendendo $\lambda = 2$ si ha l'espressione desiderata.