Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2016-17, II semestre
18 settembre, 2017

CP110 Probabilità: esame del 18 settembre 2017

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si puo' usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nella tabella sotto. Notare che già con cinque esercizi risolti correttamente si arriva al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome:____________________________________

1. Lanciamo un dado ripetutamente. Siano T_1 e T_6 il numero di lanci per ottenere il primo 1 e il primo 6 rispettivamente.

   (a) Dire se T_1 e T_6 sono indipendenti

   (b) Scrivere la densità di probabilità congiunta di T_1 e T_6

   (c) Scrivere la densità di probabilità della variabile $X = |T_6 - T_1|$.

Soluzione:
T_1 e T_6 sono variabili geometriche di parametro $\frac{1}{6}$. Non sono indipendenti poiché per esempio $\{T_1 = 1\} \cap \{T_6 = 1\} = \emptyset$ mentre $\mathbb{P}(T_1 = 1) = \mathbb{P}(T_6 = 1) = \frac{1}{6}$, dunque

$$0 = \mathbb{P}(T_1 = 1, T_6 = 1) \neq \mathbb{P}(T_1 = 1)\mathbb{P}(T_6 = 1).$$

Siano $k > j$ due interi positivi. L'evento $\{T_1 = j\} \cap \{T_6 = k\}$ equivale a: i primi $j-1$ lanci sono diversi da 1 e 6; il j-esimo lancio è 1; i lanci da $j+1$ a $k-1$ (inclusi) sono diversi da 6; il k-esimo lancio è 6. Allora per $k > j$ si ha

$$\mathbb{P}(T_1 = j, T_6 = k) = \left(\frac{4}{6}\right)^{j-1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-j-1} \frac{1}{6} = \left(\frac{4}{6}\right)^{j-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-j-1} \frac{1}{36}.$$

Se $j = k$ abbiamo $\mathbb{P}(T_1 = j, T_6 = k) = 0$, mentre se $j > k$ ragionando come sopra si ha

$$\mathbb{P}(T_1 = j, T_6 = k) = \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-k-1} \frac{1}{36}.$$

Quindi la densità di probabilità congiunta di T_1 e T_6 si puo' scrivere nella forma

$$\mathbb{P}(T_1 = j, T_6 = k) = \frac{1}{36} \left(\mathbf{1}_{j>k} \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-k-1} + \mathbf{1}_{j<k} \left(\frac{4}{6}\right)^{j-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-j-1} \right).$$

La variabile $X = |T_6 - T_1|$ vale $h \in \mathbb{N}$ se e solo se $T_1 = h + k, T_6 = k$ oppure $T_6 = h + k, T_1 = k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Allora, per ogni $h \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = h) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}(T_1 = h + k, T_6 = k) + \mathbb{P}(T_1 = k, T_6 = h + k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathbb{P}(T_1 = h + k, T_6 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{h-1} \frac{1}{36} = \left(\frac{5}{6}\right)^{h-1} \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Dunque vediamo che X è una geometrica di parametro $\frac{1}{6}$.

Nome:______________________________________

2. Consideriamo un insieme aleatorio $\mathcal{X} \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ottenuto con la seguente regola: per ogni $i \in \mathbb{N}$ indipendentemente, poniamo $i \in \mathcal{X}$ con probabilità $\frac{1}{2}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia $X_k = |\mathcal{X} \cap \{1, \dots, k\}|$ la cardinalità del sottoinsieme di numeri non superiori a k.

   (a) Calcolare la probabilità che $X_k = m$, per ogni $m, k \in \mathbb{N}$.

   (b) Dimostrare che l'evento $X_k > \frac{2k}{3}$ ha probabilità che tende a zero per $k \to \infty$.

   (c) Calcolare la probabilità che $|X_k - \frac{k}{2}| \leqslant \sqrt{k}\log(k)$, per $k \to \infty$.

Soluzione: La cardinalità X_k è una binomiale di parametri k, $\frac{1}{2}$. Dunque, per interi $k \geqslant m \geqslant 0$ si ha

$$\mathbb{P}(X_k = m) = 2^{-k}\binom{k}{m}.$$

Per altri valori di k, m si ha $\mathbb{P}(X_k = m) = 0$.
Osserviamo che

$$Z_k = \frac{X_k - \frac{k}{2}}{\sqrt{\frac{k}{4}}}$$

è approssimativamente una normale standard per il teorema del limite centrale. Dunque se $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(Z_k > t) = 1 - \Phi(t)\,.$$

Notiamo che se $t > 0$ è fissato, se k è abbastanza grande si ha che $X_k > 2k/3$ implica $Z_k > t$. Allora $\mathbb{P}(X_k > 2k/3) \leqslant \mathbb{P}(Z_k > t)$. Allora

$$\limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}(X_k > 2k/3) \leqslant 1 - \Phi(t),$$

per ogni $t > 0$. Passando a $t \to \infty$ si ha $\mathbb{P}(X_k > 2k/3) \to 0$.
In maniera simile si ottiene

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(|X_k - \tfrac{k}{2}| \leqslant \sqrt{k}\log(k)) = 1.$$

Infatti, se $t > 0$ è fissato, per k abbastanza grande si ha che $|Z_k| \leqslant t$ implica $|X_k - \frac{k}{2}| \leqslant \sqrt{k}\log(k)$. Allora

$$\liminf_{k\to\infty} \mathbb{P}(|X_k - \tfrac{k}{2}| \leqslant \sqrt{k}\log(k)) \geqslant \Phi(t),$$

e passando a $t \to \infty$ si conclude.

Nome:____

3. Sia $P = (X, Y)$ un punto del piano scelto uniformemente a caso nella regione $U = A \cup B$, dove A e B sono i rettangoli

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; |x - 10| \leq 2\,, \; |y| \leq 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; |x + 3| \leq 3\,, \; |y| \leq 1\}$$

   (a) Calcolare la probabilità che $P \in A$

   (b) Le coordinate X, Y di P sono indipendenti ?

Soluzione: Le regioni A, B sono disgiunte, e hanno area, rispettivamente $|A| = 8$ e $|B| = 12$. Allora

$$\mathbb{P}(P \in A) = \frac{|A|}{|A| + |B|} = \frac{2}{5}.$$

Notiamo che la densità congiunta di X, Y si puo' scrivere come

$$f(x, y) = \frac{1}{20} \left(\mathbf{1}_{|x-10| \leqslant 2} + \mathbf{1}_{|x+3| \leqslant 3} \right) \mathbf{1}_{|y| \leqslant 1} = f_X(x)\, f_Y(y),$$

dove

$$f_X(x) = \frac{1}{10} \left(\mathbf{1}_{|x-10| \leqslant 2} + \mathbf{1}_{|x+3| \leqslant 3} \right)\,, \qquad f_Y(y) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{|y| \leqslant 1}\,.$$

Allora X e Y sono indipendenti.

Nome:____

4. Sia X la variabile aleatoria continua con funzione di distribuzione

$$F(x) = c\,\mathbf{1}_{x>0} \exp\left(-x^{-\frac{1}{4}}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare:

(a) Il valore di c.

(b) La probabilità che $X > (\log 2)^{-4}$.

(c) La denistà di probabilità di X.

Soluzione: Notiamo che F è una funzione non-decrescente di x, che vale 0 per $x < 0$ e cresce a c per $x \to \infty$. Per essere una funzione di distribuzione allora si deve avere $c = 1$.
Per definizione si ha

$$\mathbb{P}(X > (\log 2)^{-4}) = 1 - F((\log 2)^{-4}) = 1 - e^{\log(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}.$$

Per la densità di X si pone $f(x) = F'(x)$ e dunque

$$f(x) = \mathbf{1}_{x>0} \frac{1}{4x^{1+\frac{1}{4}}} \exp\left(-x^{-\frac{1}{4}}\right).$$

Nome:____

5. Due giocatori di biliardo A e B si sfidano. Ogni giocatore ha probabilità $\frac{1}{2}$ di vincere ogni partita indipendentemente dalle altre. Giocano due partite alla volta e si fermano non appena uno dei due vince entrambe le partite di quel turno.

   (a) Quante partite giocano in totale in media ?

   (b) Sapendo che la sfida termina con la vittoria di A, quante sconfitte in media subisce A ?

Soluzione: Ogni turno è fatto di due partite. La sfida finisce quando entrambe le partite di un turno sono vinte da uno stesso giocatore. Questo evento ha probabilità $\frac{1}{2}$ (essendo 1/4 per A e 1/4 per B). Il numero di turni dunque è una geometrica di parametro $\frac{1}{2}$. Allora in media si giocano due turni, ossia 4 partite.

Sia E l'evento $\{A$ vince la sfida$\}$. Sia E_k l'evento $\{A$ vince la sfida al k-esimo turno$\}$. Sia X il numero di sconfitte di A. Notiamo che se A vince la sfida al k-esimo turno allora necessariamente tutti i $k-1$ turni precedenti sono risultati in un pareggio, che implica $X = k-1$. In altri termini per ogni $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, si ha

$$\mathbb{P}(X = j|E_k) = \mathbf{1}_{j=k-1}.$$

Allora per ogni $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\mathbb{P}(X = j|E) = \frac{1}{\mathbb{P}(E)}\,\mathbb{P}(X = j, E) = \frac{1}{\mathbb{P}(E)}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X = j, E_k) = \frac{\mathbb{P}(E_{j+1})}{\mathbb{P}(E)}.$$

Ora l'evento E_{j+1} equivale a dire che i turni $1, \ldots, j$ sono risultati in pareggio, mentre il $j+1$-esimo turno è una doppia vittoria di A. Allora

$$\mathbb{P}(E_{j+1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{1}{4}.$$

Notiamo che

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}(E_{j+1}) = \frac{1}{2}\,,$$

come dobbiamo aspettarci per simmetria. In conclusione

$$\mathbb{P}(X = j|E) = \frac{\mathbb{P}(E_{j+1})}{\mathbb{P}(E)} = \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{1}{2}\,, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Dunque il valore atteso richiesto vale

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\mathbb{P}(X = j|E) = \sum_{j=1}^{\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{1}{2} = 1.$$

Nome:_______________________________________

6. In un pronto soccorso i pazienti arrivano seguendo la distribuzione di un processo di Poisson con una media di 6 pazienti all'ora. I pazienti vengono classificati secondo tre codici indipendentemente l'uno dall'altro: bianco con probabilità $\frac{1}{2}$, verde con probabilità $\frac{1}{3}$ e rosso con probabilità $\frac{1}{6}$. Calcolare:

   (a) Il valore atteso del numero di pazienti con codice bianco in tre ore.

   (b) Il valore atteso del numero di pazienti con codice rosso in due ore.

   (c) La probabilità che in un intervallo di tempo di 40 minuti non arrivi alcun paziente con codice verde.

Soluzione: Il numero medio di pazienti in 3 ore vale 18. Di questi in media la metà hanno codice bianco, dunque Il valore atteso del numero di pazienti con codice bianco in tre ore è 9. Lo stesso ragionamento mostra che Il valore atteso del numero di pazienti con codice rosso in due ore è $6 \times 2 \times \frac{1}{6} = 2$.
Il numero di pazienti con codice verde in un dato intervallo di tempo di n minuti è una variabile di Poisson, con parametro riscalato $\lambda' = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{n}{60}$. Allora in 40 minuti il parametro diventa $\lambda' = 2 \times \frac{40}{60} = \frac{4}{3}$. Dunque la probabilità che in un intervallo di tempo di 40 minuti non arrivi alcun paziente con codice verde è

$$e^{-\lambda'} = e^{-4/3}.$$

Nome:____