Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2018-19, II semestre
13 settembre, 2019

CP210 Introduzione alla Probabilità: Esame 3

Cognome	
Nome	
Matricola	
Firma	

Nota:

1. L'unica cosa che si può usare durante l'esame è una penna o una matita. Tutto il resto (calcolatrice, libri, appunti, altri fogli di carta, ...) deve essere messo da parte.
2. Risposte implicite sotto forma di coefficienti binomiali, potenze, esponenziali ecc. sono benvenute. Mostrate in dettaglio il vostro lavoro.
3. Non parlate durante l'esame. Copiare o far copiare non è tollerabile.
4. Scrivete il vostro nome su ogni pagina. In caso di utilizzo di piu' pagine per un singolo esercizio indicare chiaramente l'ordine.
5. Il punteggio massimo per ogni esercizio è indicato nel testo. Notare che già con quattro esercizi risolti correttamente si arriva vicino al trenta.

Buon lavoro!

esercizio	1	2	3	4	5	6	totale
punti							
su	6	6	6	6	6	6	36

Nome:____

1. **(6 Punti)** Una cartoleria vende tre scatole a sorpresa: la scatola A costa 2 euro, la B 3 euro e la C 4 euro. La scatola A è vuota con probabilità 1/2 e contiene 2 penne con probabilità 1/2; la scatola B è vuota con probabilità 1/2 e contiene 4 penne con probabilità 1/2; la scatola C contiene 2 penne con probabilità 1. Un passante entra nel negozio e compra una delle tre scatole scelta uniformemente a caso:

   (a) Quanto spende in media il passante ?

   (b) Sapendo che ha trovato 2 penne qual è la probabilità di aver scelto la scatola A ?

   (c) Sapendo che ha trovato almeno 2 penne qual è la probabilità di aver speso almeno 3 euro ?

Soluzione:

a). La spesa media è $2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{3} = 3$ euro.

b). Sia E l'evento $\{2 \text{ penne}\}$ e A l'evento $\{\text{scatola A}\}$. Allora

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{P(E)} = \tfrac{1}{3},$$

dove abbiamo usato:

$$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} + 0 + 1 \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2}.$$

c). Sia F l'evento $\{\text{almeno 2 penne}\}$ e G l'evento $\{\text{spende almeno 3 euro}\}$. Notiamo che $G = B \cup C = A^c$. Allora

$$P(G|F) = \frac{P(F \cap G)}{P(F)} = \frac{3}{4}.$$

Infatti:

$$P(F \cap G) = P(F \cap B) + P(F \cap C) = P(F|B)P(B) + P(F|C)P(C) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} + 1 \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2},$$

e

$$P(F) = P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) + P(F|C)P(C) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} + 1 \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

Nome:______________________________________

2. **(6 Punti)** Siano Z_1, Z_2, Z_3 variabili normali standard indipendenti. Sia

$$Y = \begin{cases} Z_1 & \text{se } Z_3 \leqslant 0 \\ Z_1 + Z_2 & \text{se } Z_3 > 0 \end{cases}$$

(a) Calcolare la probabilità di $Y < 0$.

(b) Scrivere la funzione di distribuzione di Y

(c) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.

Soluzione:

a). Scriviamo

$$\begin{aligned} P(Y < 0) &= P(Z_3 \leqslant 0)P(Y < 0|Z_3 \leqslant 0) + P(Z_3 > 0)P(Y < 0|Z_3 > 0) \\ &= \tfrac{1}{2}P(Z_1 < 0) + \tfrac{1}{2}P(Z_1 + Z_2 < 0) \\ &= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'indipendenza.

b). Notiamo che se $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant t) &= P(Z_3 \leqslant 0)P(Y \leqslant t|Z_3 \leqslant 0) + P(Z_3 > 0)P(Y \leqslant t|Z_3 > 0) \\ &= \tfrac{1}{2}P(Z_1 \leqslant t) + \tfrac{1}{2}P(Z_1 + Z_2 \leqslant t) \\ &= \tfrac{1}{2}\Phi(t) + \tfrac{1}{2}\Phi(t/\sqrt{2}), \end{aligned}$$

dove Φ è la funzione di distribuzione della normale standard e usiamo il fatto che $Z_1 + Z_2$ è una normale di media 0 e varianza 2 indipendente da Z_3. Quindi se $t < 0$ si ha $F_Y(t) = \frac{1}{2}\Phi(t/\sqrt{2})$, mentre se $t \geqslant 0$ allora $F_Y(t) = \frac{1}{2}(1 + \Phi(t/\sqrt{2}))$.

b). Dal punto precedente, differenziando in t otteniamo che la densità di probabilità di Y è

$$f_Y(y) = \tfrac{1}{2}\varphi(y) + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\sqrt{2}}\varphi(y/\sqrt{2}), \qquad y \in \mathbb{R}$$

dove φ è la densità della normale standard.

c). φ è una funzione pari, dunque $E[Y] = 0$. Per la varianza abbiamo quindi

$$\mathrm{Var}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)dy = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y^2\varphi(y)dy + \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} y^2\tfrac{1}{\sqrt{2}}\varphi(y/\sqrt{2})dy = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \times 2 = \tfrac{3}{2}.$$

Nome:______________________________________

3. **(6 Punti)** Lanciamo 3 dadi equi con tre facce ciascuno, numerate 1,2,3. Sia M il massimo dei tre dadi, e sia S la somma dei tre dadi meno M (ossia la somma dei due dadi rimanenti dopo aver tolto il massimo). Calcolare:

   (a) la densità di probabilità congiunta di (M, S)

   (b) il valore atteso di M

   (c) la probabilità di $M > S$

Soluzione:

a). Ci sono 3 esiti possibili per M (tutti i valori da 1 a 3) e 5 esiti possibili per S (tutti i valori da 2 a 6). La coppia $(1, 2)$ si realizza solo avendo tre 1 e dunque $P(1, 2) = 1/27$. Le coppie $(1, 3), \ldots, (1, 6)$ sono impossibili. La coppia $(2, 2)$ si realizza con un 2 e due 1, mentre $(2, 3)$ si realizza con due 2 e un 1 e dunque $P(2, 2) = P(2, 3) = 3/27$. La coppia $(2, 4)$ si ottiene con tre 2 quindi $P(2, 4) = 1/27$. Le coppie $(2, 5)$ e $(2, 6)$ sono impossibili. La coppia $(3, 2)$ si realizza con un 3 e due 1, mentre $(3, 3)$ si realizza con un 3, un 2 e un 1 e dunque $P(3, 2) = 3/27$, $P(3, 3) = 6/27$. La coppia $(3, 4)$ si ottiene con due tre e un 1 oppure con un tre e due 2 quindi $P(3, 4) = 6/27$. La coppia $(3, 5)$ si ottiene con due 3 e un 2 dunque $P(3, 5) = 3/27$. La coppia $(3, 6)$ si ottiene con tre 3 quindi $P(3, 6) = 1/27$. In conclusione si ha $P(M = m, S = s) = \frac{1}{27} \times a(m, s)$ dove $a(m, s)$ è la tabella

$m \setminus s$	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0
2	3	3	1	0	0
3	3	6	6	3	1

b). La densità marginale di M vale

$$P(M = 1) = 1/27,\ P(M = 2) = 7/27,\ P(M = 3) = 19/27.$$

Allora

$$E[M] = \tfrac{1}{27}(1 + 14 + 57) = \tfrac{8}{3}.$$

c). L'evento $M > S$ si realizza solo con la coppia $(3, 2)$ e dunque

$$P(M > S) = P(3, 2) = \tfrac{1}{9}.$$

Nome:____

4. **(6 punti)** Sul tratto di strada A e sul tratto di strada B si stima che gli incidenti stradali avvengano secondo due processi di Poisson indipendenti con una media di 1 al mese per A e 3 al mese per B. Sia I_A il numero di incidenti avvenuti nella strada A nei primi 3 mesi dell'anno e sia I_B il numero di incidenti avvenuti nella strada B nei primi 2 mesi dell'anno. Calcolare:

   (a) i valori attesi $\mathbb{E}[I_A]$ e $\mathbb{E}[I_B]$;

   (b) le varianze $\text{Var}(I_A)$ e $\text{Var}(I_B)$;

   (c) la probabilità dell'evento $\{I_A + I_B = 2\}$.

Soluzione: (a). Se la media per A è 1 al mese allora I_A è Poisson di parametro $\lambda_A = 3$, e $E[I_A] = 3$. Se la media per B è 3 al mese allora I_B è Poisson di parametro $\lambda_B = 6$, e $E[I_B] = 6$.

(b). La varianza è uguale alla media per variabili di Poisson, dunque $\text{Var}(I_A) = 3$ e $\text{Var}(I_B) = 6$.

(c). L'evento $I_A + I_B = 2$ si ottiene in tre modi:

$$(I_A = 2, I_B = 0),\ (I_A = 1, I_B = 1),\ (I_A = 0, I_B = 2).$$

Per l'indipendenza si ha che $I_A + I_B$ è Poisson di parametro $\lambda_A + \lambda_B = 9$. Allora

$$P(I_A + I_B = 2) = \tfrac{1}{2} 9^2 e^{-9} = \tfrac{81}{2}\, e^{-9}.$$

Nome:____

5. **(6 punti)** Immaginiamo di lanciare una moneta equa 10000 volte. Sia S il numero di teste. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire per quali valori di t è vera:

   (a) $P(S \leqslant 5000 + t) \approx 0.5$

   (b) $P(-t \leqslant S - 5000 \leqslant t) \approx 0.68$

   (c) $P(S > t) \approx 0.001$

Soluzione:

a). Sappiamo che S è approssimativamente normale con media 5000 e varianza $10000 \times \frac{1}{4}$, ossia che

$$Z = \frac{S - 5000}{50}$$

è circa una normale standard. Allora $P(S \leqslant 5000 + t) \approx 0.5$ vale per $t = 0$.

b). Inoltre $P(-t \leqslant S - 5000 \leqslant t) \approx P(-t/50 \leqslant Z \leqslant t/50) = 2\Phi(t/50) - 1$. Allora

$$P(-t \leqslant S - 5000 \leqslant t) \approx 0.68$$

se $t = 50$.

c). Infine $P(S > t) \approx P(Z > (t - 5000)/50) = 1 - \Phi((t - 5000)/50)$. Sappiamo inoltre che $\Phi(3) \approx 0.999$. E dunque $P(S > t) \approx 0.001$ vale per t tali che $(t - 5000)/50 \approx 3$ ossia $t \approx 5150$.

Nome:____

6. **(6 Punti)** Due persone si danno appuntamento. A arriva a un orario uniformemente distribuito tra le $8:00$ e le $8:10$, mentre B arriva a un orario uniformemente distribuito tra le $8:05$ e le $8:15$. Supponendo indipendenza tra gli orari di arrivo, calcolare:

   (a) la probabilità che B preceda A

   (b) il tempo di attesa medio tra il primo e il secondo arrivo

Soluzione: (a). Siano τ_A, τ_B i tempi di arrivo dopo le 8 di modo che se misuriamo in minuti si ha $\tau_A \in [0, 10]$ e $\tau_B \in [5, 15]$. Allora le due variabili aleatorie hanno densità congiunta

$$f(t,s) = \frac{1}{100}\mathrm{I}(t \in [0,10])\mathrm{I}(s \in [5,15])$$

Pertanto

$$\begin{aligned} P(\tau_A > \tau_B) &= \frac{1}{100}\int_0^{10} dt \int_5^{15} ds\, \mathrm{I}(s < t) \\ &= \frac{1}{100}\int_5^{10} ds \int_s^{10} dt = \frac{1}{100}\int_5^{10} (10-s)ds = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(b). Il tempo di attesa è $|\tau_B - \tau_A|$. Allora

$$\begin{aligned} E[|\tau_B - \tau_A|] &= \frac{1}{100}\int_0^{10} dt \int_5^{15} ds\, [(t-s)\mathrm{I}(s<t) + (s-t)\mathrm{I}(t<s)] \\ &= \frac{1}{100}\int_5^{10} ds \int_s^{10} (t-s)dt + \frac{1}{100}\int_0^{5} dt \int_5^{15} (s-t)ds + \frac{1}{100}\int_5^{10} dt \int_t^{15} (s-t)ds \\ &= \frac{375}{100} + \frac{875}{600} + \frac{125}{600} = \frac{65}{12} \approx 5.4. \end{aligned}$$

Nome:____