Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2009-2010, II semestre
25 gennaio, 2011

CP110 Probabilità: Esame del 25 gennaio, 2011

Testo e soluzione

1. **(6 pts)** Un mazzo di 20 carte contiene 15 carte rosse e 5 carte nere. 5 carte sono estratte a caso dal mazzo. Calcolare la probabilità che tra le 5 carte estratte:

   a) ci siano solo carte rosse

   b) ci siano 2 carte rosse e 3 nere

Soluzione: Il numero di estrazioni possibili è $\binom{20}{5}$. Quelle con 5 carte rosse sono $\binom{15}{5}$ e quelle con 2 rosse e 3 nere sono $\binom{15}{2} \times \binom{5}{3}$. Quindi si ha

$$a) \quad \frac{\binom{15}{5}}{\binom{20}{5}}$$

$$b) \quad \frac{\binom{15}{2} \times \binom{5}{3}}{\binom{20}{5}}$$

2. **(6 pts)** Tra le ore 8:00 e le ore 10:00 un centralino riceve telefonate secondo un processo di Poisson con una media di due telefonate ogni dieci minuti. Calcolare

   a) il numero medio di chiamate ricevute tra le 8:00 e le 9:00

   b) la probabilità di non avere ricevuto chiamate tra le 8:00 e le 8:20

   c) la probabilità che ci siano più di due chiamate tra le 8 e le 8:10

Soluzione:
a) Il numero di chiamate tra le 8:00 e le 9:00 è dato da una variabile di Poisson di parametro $\lambda = 2 \times 6 = 12$. Quindi il numero medio di chiamate in questo intervallo di tempo è pari a 12
b) Il numero di chiamate tra le 8:00 e le 8:20 è dato da una variabile di Poisson di parametro $\lambda = 2 \times 2 = 4$. Quindi la prob. di zero chiamate è data da e^{-4}.
c) Il numero di chiamate tra le 8:00 e le 8:10 è dato da una variabile di Poisson di parametro $\lambda = 2 \times 1 = 2$. Quindi la prob. di più di due chiamate tra le 8 e le 8:10 è data da $1 - Prob(0) - Prob(1) - Prob(2) = 1 - e^{-2}(1 + 2 + 2) = 1 - 5e^{-2}$.

3. **(6 pts)** Per una catena di Markov a tre stati, le probabilità di salto da A a B, da B a C, e da C a A sono uguali a $1/3$, e la probabilità di restare fermi è uguale a $2/3$.

   a) Scrivere la matrice di transizione della catena e calcolarne la misura invariante.

   b) Partendo da A, calcolare la probabilità di essere in C dopo tre salti

Soluzione: La matrice è data da

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema $\sum_i \pi_i P_{i,j} = \pi_j$ si trova che la misura invariante π è uniforme, ossia $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$.
Ci sono tre modi di arrivare in C dopo tre passi se si parte da A.
1) Si rimane per una volta fermi in A e poi si va in B e poi in C. (Prob. $2/3 \times 1/3 \times 1/3 = 2/27$)
2) Si salta prima in B poi ci si ferma in B e poi si salta in C. (Prob. $1/3 \times 2/3 \times 1/3 = 2/27$)
3) Si salta prima in B poi in C e poi ci si ferma in C. (Prob. $1/3 \times 1/3 \times 2/3 = 2/27$)
Sommando i tre casi, si ha $6/27 = 2/9$.

4. **(6 pts)** L'intensità del traffico lungo un tratto di autostrada è misurata da un parametro $N \in \{0, 1, 2, \dots\}$, e Mario stima che il tempo (in minuti) necessario a percorrere il tratto è una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda = e^{-N}$. Tuttavia, il parametro N è esso stesso soggetto a incertezza, e la società che gestisce il tratto di autostrada segnala agli automobilisti che N si può considerare con buona approssimazione distribuito come una variabile di Poisson con media 1. Quanto tempo impiegherà in media Mario a percorrere il tratto ?

Soluzione: Dato il valore di N Mario impiega in media $1/\lambda = e^N$ minuti, poiché il valor medio di un'esponenziale di parametro λ è $1/\lambda$. Se N stesso è aleatorio, allora il valor medio diventa $E[e^N]$ dove $E[\cdot]$ sta per il valore atteso. Se N è distribuita come una Poisson di parametro 1 allora si ha

$$E[e^N] = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k!} = e^{-1} e^e = e^{(e-1)}\,.$$

5. **(6 pts)** Un rivenditore di automobili acquista 20 automobili dalla fabbrica A e 10 dalla fabbrica B. E' noto che le automobili provenienti dalla fabbrica A hanno un difetto di carrozzeria con probabilità 0.05 mentre per le automobili provenienti dalla fabbrica B tale probabilità scende allo 0.01. Durante un'ispezione il rivenditore sceglie a caso due tra tutte le automobili e le sottopone a un test della carrozzeria.

   Se nessuna delle due risulta avere il difetto, qual'è la probabilità che provengano entrambi dalla fabbrica A ?

Soluzione: Sia E l'evento "nessuna delle 2 ha difetti", e F l'evento "entrambi prodotte da A". La prob. richiesta è data da

$$P(F\,|\,E) = P(E\,|\,F)\frac{P(F)}{P(E)}$$

Ora

$$P(F) = \binom{20}{2}\Big/\binom{30}{2} = \frac{20}{30}\frac{19}{29}.$$

Inoltre (assumendo indipendenza)

$$P(E\,|\,F) = (0.95)^2$$

Rimane da calcolare $P(E)$. A tal fine introduciamo gli eventi G: "una prodotta da A e una prodotta da B" e H: "entrambi prodotte da B". Si ha

$$P(E) = P(E\,|\,F)P(F) + P(E\,|\,G)P(G) + P(E\,|\,H)P(H)$$

Ora,

$$P(E\,|\,G) = 0.95 \times 0.99\,, \qquad P(G) = \binom{20}{1} \times \binom{10}{1}\Big/\binom{30}{2} = 2 \times \frac{20}{30}\frac{10}{29}\,.$$

In maniera analoga si calcola

$$P(E\,|\,H) = (0.99)^2\,, \qquad P(H) = \binom{10}{2}\Big/\binom{30}{2} = \frac{10}{30}\frac{9}{29}\,.$$

In conclusione,

$$P(F\,|\,E) = \frac{(0.95)^2 \times 20 \times 19}{(0.95)^2 \times 20 \times 19 + 2(0.95 \times 0.99) \times 20 \times 10 + (0.99)^2 \times 10 \times 9}$$

6. **(6 pts)** Enunciare una versione del Teorema del Limite Centrale e illustrare l'enunciato con un esempio. Fornire inoltre alcuni cenni di dimostrazione del teorema.