Dipartimento di Matematica, Roma Tre
Pietro Caputo

2009-2010, II semestre
13 aprile, 2010

CP110 Probabilità: Esonero 1

Testo e soluzione

1. **(7 pt)** Una scatola contiene 15 palle numerate da 1 a 15. Le palle vengono estratte a caso una alla volta finché la scatola non è vuota. Per ogni $i, j = 1, \ldots, 15$, diciamo che la palla i è nella posizione j se la palla numero i viene prelevata alla j-esima estrazione, e chiamiamo $E_{i,j}$ questo evento.

(a) Descrivere a parole i tre eventi

$$A = \bigcup_{j=1}^{7} E_{1,2j}\,, \quad B = \bigcup_{j=8}^{15} E_{8,j}\,, \quad C = \bigcap_{i=1}^{7} \bigcup_{j=1}^{7} E_{2i,2j}\,.$$

(b) Calcolare la probabilità degli eventi A e B.

(c) Calcolare la probabilità dell'evento C.

Soluzione. L'evento A coincide con l'evento che la palla numero 1 occupa una posizione pari; l'evento B è l'evento che la palla numero 8 ha posizione maggiore o uguale a 8; l'evento C è l'evento che ogni palla di numero pari occupa una posizione pari.

Tutte le 15! sequenze sono equiprobabili. Notiamo che per ogni $i, j = 1, \ldots, 15$ si ha

$$\mathbb{P}(E_{i,j}) = \frac{14!}{15!} = \frac{1}{15}\,,$$

poiché fissando la posizione di una delle palle si hanno 14! sequenze possibili per le rimanenti 14 palle. In altre parole, per ogni palla, ciascuna delle 15 possibili posizioni è equiprobabile. In particolare, essendo gli $\{E_{i,j},\ j = 1, \ldots, 15\}$ disgiunti (per un i fissato), si ha

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{j=1}^{7} E_{1,2j}) = \sum_{j=1}^{7} \mathbb{P}(E_{1,2j}) = \frac{7}{15}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\cup_{j=8}^{15} E_{8,j}) = \sum_{j=8}^{15} \mathbb{P}(E_{8,j}) = \frac{8}{15}\,.$$

Terza domanda: Ci sono 7 posizioni pari $(2, 4, \ldots, 14)$ e 8 posizioni dispari $(1, 3, \ldots, 15)$. Ci sono dunque 7! possibili ordinamenti delle sette palle nelle sette posizioni pari, e per ognuno di essi, ci sono 8! ordinamenti delle palle nelle posizioni dispari. Quindi

$$\mathbb{P}(B) = \frac{7!8!}{15!} = \frac{1}{\binom{15}{7}}\,.$$

Questo risponde al punto (c).

Una soluzione alternativa al punto (c): Poiché siamo interessati solo alla parità delle palle, possiamo dipingere di nero tutte le palle di numero pari e di bianco tutte quelle di numero dispari. Ci sono $\binom{15}{7}$ possibili sequenze di 7 palle bianche e di 8 palle nere (scegliere le posizioni di quelle nere). Tutte le sequenze hanno la stessa probabilità. Di queste solo una (quella alternata bianco/nero/..../nero/bianco) produce l'evento richiesto. Quindi $\mathbb{P}(B) = 1/\binom{15}{7}$.

2. **(7 pt)** Un asso scelto a caso viene rimosso da un mazzo standard di 52 carte. Successivamente 3 carte vengono estratte a caso (senza rimpiazzo).

   (a) Qual'è la probabilità che le 3 carte abbiano (tra loro) lo stesso seme ?

   (b) Se le 3 carte sono tutte e tre di cuori, qualè la probabilità che l'asso rimosso all'inizio fosse l'asso di cuori ?

Soluzione. Supponiamo per un momento che la carta rimossa all'inizio fosse l'asso di cuori. Il numero totale di esiti possibili per le tre carte da estrarre è $\binom{51}{3}$. Per fare l'evento E che le 3 carte hanno lo stesso seme possiamo scegliere 3 dei 12 cuori rimanenti, o 3 dei 13 fiori, o 3 dei 13 quadri, oppure 3 delle 13 spade. Quindi si ha che $\binom{12}{3} + 3\binom{13}{3}$ delle $\binom{51}{3}$ scelte costituiscono l'evento E. Il risultato non cambia se la carta rimossa era un asso non di cuori. In effetti il risultato e' invariato qualunque fosse la carta rimossa all'inizio. Pertanto la probabilità richiesta nel punto (a) è data da

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\binom{12}{3} + 3\binom{13}{3}}{\binom{51}{3}} .$$

Per il punto (b), chiamiamo AC l'evento che la carta rimossa all'inizio è l'asso di cuori e chiamiamo $3C$ l'evento che le 3 carte successive sono tutte di cuori. Vogliamo calcolare

$$\mathbb{P}(AC|3C) = \mathbb{P}(3C|AC)\,\frac{\mathbb{P}(AC)}{\mathbb{P}(3C)}$$

Ragionando come sopra:

$$\mathbb{P}(3C|AC) = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{51}{3}} .$$

Calcoliamo ora $\mathbb{P}(3C)$. Per simmetria, l'evento $3C$ ha la stessa probabilità dell'evento che le tre carte siano tutte di picche, o tutte di fiori o tutte di quadri. Poiché la somma di queste probabilità fa $\mathbb{P}(E)$, si ha

$$\mathbb{P}(3C) = \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(E) .$$

In conclusione, poiché $\mathbb{P}(AC) = 1/4$,

$$\mathbb{P}(AC|3C) = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{12}{3} + 3\binom{13}{3}} = \frac{10}{49} .$$

3. **(6 pt)** In un allevamento ittico ci sono n vasche ognuna delle quali contiene $2n+1$ pesci. Ogni pesce è contaminato da un certo batterio con probabilità $\frac{1}{2}$ indipendentemente dagli altri. Gli allevatori considerano *buona* una vasca se al piú n pesci in quella vasca sono contaminati. Calcolare il valor medio e la varianza del numero di vasche buone in funzione di n.

Soluzione. Il numero di pesci contaminati in una vasca è una binomiale di parametri $2n+1$ e $p = 1/2$. Sia p_b la probabilità che una vasca abbia al piú n pesci contaminati. Il numero di vasche buone dunque e' una binomiale di parametri n e p_b. Il suo valor medio è np_b e la sua varianza è $np_b(1-p_b)$. Osserviamo che per simmetria $p_b = \frac{1}{2}$. Quindi il valor medio è $n/2$ e la varianza è $n/4$.

Per una dimostrazione esplicita del fatto che $p_b = \frac{1}{2}$ si osservi che

$$p_b = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} \frac{1}{2^{2n+1}} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2},$$

dove l'ultima identità segue dal fatto che

$$\binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{2n+1-k},$$

per ogni $k = 0, \ldots, 2n+1$, e

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}.$$

4. **(8 pt)** Si considerino lanci indipendenti di un dado equo a sei facce. Sia X il numero di lanci necessario per ottenere la prima faccia pari e sia Y il numero di lanci necessario per ottenere la prima faccia maggiore di 3. Trovare

   (a) $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$.

   (b) $\mathbb{P}(X > 2)$.

   (c) $\mathbb{P}(X > 2 \,|\, Y = 2)$.

   (d) $\mathbb{P}(X = Y)$

Soluzione. (a). X e Y sono v.a. geometriche di parametro $p = \frac{1}{2}$. Quindi

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{p} = 2\,.$$

(b). $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, $k = 1, 2, \ldots$. Dunque

$$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) = 1 - p - (1-p)p = \frac{1}{4}\,.$$

(c). $\mathbb{P}(X > 2|Y = 2) = \mathbb{P}(\{X > 2\} \cap \{Y = 2\})/\mathbb{P}(Y = 2)$. L'evento $\{X > 2\} \cap \{Y = 2\}$ coincide con l'evento che il primo lancio è dispari e minore o uguale a 3, e il secondo lancio è dispari e maggiore di tre. Quindi $\{X > 2\} \cap \{Y = 2\}$ coincide con l'evento che il primo lancio è 1 o 3 (probabilità $\frac{2}{6}$) e il secondo lancio è 5 (probabilità $\frac{1}{6}$). Per l'indipendenza dei lanci si ha

$$\mathbb{P}(\{X > 2\} \cap \{Y = 2\}) = \frac{2}{6}\,\frac{1}{6} = \frac{1}{18}\,.$$

Poiché $\mathbb{P}(Y = 2) = (1-p)p = \frac{1}{4}$, si ha

$$\mathbb{P}(X > 2|Y = 2) = \frac{2}{9}\,.$$

(d). L'evento $X = Y$ coincide con $\cup_{k=1}^{\infty}\{X = Y = k\}$. Inoltre, $\{X = Y = k\}$ è l'evento che i primi $k-1$ lanci sono 1 o 3 (probabilità $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ per ogni lancio), mentre il k-esimo lancio è 4 o 6 (probabilità $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$). Per l'indipendenza dei lanci si ha

$$\mathbb{P}(X = Y = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k}\,.$$

Allora, essendo gli eventi $\{X = Y = k\}$ disgiunti,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X = Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k} = \frac{1}{3\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{2}\,.$$

5. **(7 pt)** Sciatori arrivano a una seggiovia, secondo un processo di Poisson, con una media di 1 al minuto. Osserviamo gli arrivi degli sciatori per 6 minuti e poniamo N_1 per il numero di arrivi nel primo minuto, N_2 per il numero di arrivi tra il primo e il terzo minuto e N_3 per il numero di arrivi tra il terzo e il sesto minuto. Si calcoli la probabilità che

(a) il massimo tra N_1, N_2, N_3 sia almeno 1.

(b) il massimo tra N_1, N_2, N_3 sia esattamente 1.

Soluzione. Sappiamo che N_1 è una v.a. di Poisson con parametro $\lambda_1 = 1$, N_2 è una v.a. di Poisson con parametro $\lambda_2 = 2$, e N_3 è una v.a. di Poisson con parametro $\lambda_3 = 3$. Sia $X = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Allora l'evento $\{X = 0\}$ coincide con l'evento $\{N_1 = N_2 = N_3 = 0\}$. Quindi l'evento $X \geqslant 1 = \{X = 0\}^c$ ha probabilità

$$\mathbb{P}(\max\{N_1, N_2, N_3\} \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(N_1 = 0)\mathbb{P}(N_2 = 0)\mathbb{P}(N_3 = 0)\,,$$

dove abbiamo usato l'indipendenza degli eventi $\{N_i = 0\}$. In conclusione, poiché $\mathbb{P}(N_i = 0) = e^{-\lambda_i}$ si ha

$$\mathbb{P}(\max\{N_1, N_2, N_3\} \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - e^{-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3} = 1 - e^{-6}\,.$$

Per rispondere alla seconda domanda notiamo che $\{X = 1\}$ coincide con

$$\{X = 1\} = \{X \leqslant 1\} \setminus \{X = 0\}\,.$$

Quindi

$$\mathbb{P}(\max\{N_1, N_2, N_3\} = 1) = \mathbb{P}(X \leqslant 1) - \mathbb{P}(X = 0)\,.$$

Da quanto visto sopra abbiamo $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-6}$, mentre

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leqslant 1) &= \mathbb{P}\Big(\cap_{i=1}^3 \big(\{N_i = 0\} \cup \{N_i = 1\}\big)\Big)\\ &= \prod_{i=1}^3 (e^{-\lambda_i} + \lambda_i e^{-\lambda_i}) = e^{-6}\prod_{i=1}^3 (1 + \lambda_i) = 24e^{-6}\end{aligned}$$

Ne segue che la probabilità richiesta è

$$\mathbb{P}(\max\{N_1, N_2, N_3\} = 1) = 23e^{-6}\,.$$